Geraldo Claudio Broetto
Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

NÚMEROS IRRACIONAIS PARA PROFESSORES (E FUTUROS PROFESSORES) DE MATEMÁTICA

Uma abordagem direcionada à sala de aula

Edifes

Números irracionais para professores (e futuros professores) de matemática

Uma abordagem direcionada à sala de aula

Geraldo Claudio Broetto

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

Números irracionais para professores (e futuros professores) de matemática

Uma abordagem direcionada à sala de aula

Edifes

Vitória, 2017

Edifes

Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Rua Barão de Mauá, nº 30 – Jucutuquara
29040-860 – Vitória – ES
www.edifes.ifes.edu.br
editora@ifes.edu.br
Editora filiada à Associação Brasileira de Editoras Universitárias

Revisão de texto: Thaís Rosário da Silveira

Projeto Gráfico, diagramação e capa: Carolina Scopel

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecária Rossanna dos Santos Santana Rubim – CRB6- ES 403

B865	Broetto, Geraldo Claudio, 1975- Números irracionais para professores (e futuros professores) de matemática / Geraldo Claudio Broetto, Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner. – Vitória, ES : Edifes, 2017. 270 p. : Il. Inclui bibliografia. ISBN: 9788582632277 (e-book) 1. Números racionais. 2. Números irracionais. 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Santos-Wagner, Vânia Maria Pereira dos. II. Título. CDD 22 – 512.7

PREFÁCIO

Muitos materiais acerca dos números irracionais foram produzidos nos últimos tempos. São impressos e eletrônicos voltados a estudantes, matemáticos e educadores matemáticos. No que se refere à especificidade, encontramos uma grande variedade desses materiais circulando: técnicos, didáticos, paradidáticos, esotéricos – como os que envolvem as relações entre o número áureo e suas possíveis aparições em padrões existentes na natureza, romances, contos etc. No tocante aos livros didáticos de Matemática, por exemplo, geralmente o tema é apresentado de forma muito sucinta e, muitas vezes, beirando à superficialidade. Da mesma forma, os cursos de licenciatura em Matemática, *grosso modo*, acabam por reproduzir os mesmos vícios dos livros didáticos; isso quando não se põem diametralmente opostos a tal cenário e aprofundam o tema num viés exacerbadamente tecnicista, tornando-o inviável de ser abordado na sala de aula da Educação Básica.

Mas se há no mercado tal variedade, o que torna esta produção relevante e diferente das demais? Primeiramente, pelo fato de ser voltada à formação de professores que ensinam Matemática e, segundo os autores, tal direcionamento foi determinado a partir da constatação de que o assunto não é abordado adequadamente na Educação Básica. Em segundo lugar, por ir além da relação dicotômica que perpassa as salas de aulas dos mais diversos níveis de ensino – a que considera o número irracional tão somente pela relação do complementar, isto é, a típica saída pela circularidade, de que um número irracional é todo número real que não é racional, ou aquele que não pode ser escrito na forma de razão entre dois números inteiros, ou, ainda, a de que os números irracionais são os que “preenchem” a reta real.

Aqui, neste material, encontraremos, além de atividades bem elaboradas, que facultam a reflexão e a criticidade a respeito do tema, tanto aspectos teóricos relevantes, como também aspectos históricos e outros centrais às discussões no campo da Filosofia da Matemática e da Educação Matemática. Com uma abordagem que rompe com a concepção positivista de Matemática e, sobretudo, de ensinar Matemática, centrada em um tratamento linear da exposição evolutiva de conteúdos, os autores discutem também questões relativas às demonstrações em Matemática e as possibilidades de métodos para lidar com elas.

Escrito de forma clara, o texto flui, possibilitando aos leitores efetuarem leituras plausíveis sobre o tema, sobretudo em sala de aula, permitindo que se reflita e se discuta, principalmente na formação dos professores que ensinam Matemática, que os números irracionais são constructos sociais, postos na ordem do discurso, pelo menos nos meios onde se produz Matemática e, portanto, não são adereços retirados de uma caixa de Pandora. Dessa forma sugiro que seja tomado não apenas em aulas de Análise ou Fundamentos de Matemática, nos cursos de licenciatura em Matemática, mas que seja um livro de consulta a todo professor que ensina Matemática.

Santa Maria – RS, 20 de outubro de 2016.

Rodolfo Chaves

APRESENTAÇÃO

Além de estarem presentes em todos os níveis de ensino, do fundamental ao superior, os números irracionais também são um assunto frequente nos livros didáticos, em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, 2000), nas matrizes de referência para o Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB (BRASIL, 2008), na Prova Brasil (BRASIL, 2011) e no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM (BRASIL, 2009). A preocupação com questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem desses números também se faz presente no meio acadêmico, sendo objeto de trabalhos apresentados em congressos e artigos publicados em revistas científicas, bem como de pesquisas nacionais e estrangeiras. No Brasil, surgem trabalhos em nível de mestrado/doutorado relacionados aos números irracionais a partir da segunda metade da década de 1990[1].

Os resultados dessas pesquisas apontam para dificuldades e/ou insuficiências relacionadas principalmente a três

---

1 Soares, Ferreira e Moreira (1999) afirmam que, após a realização de um extenso levantamento bibliográfico sobre o assunto, foram encontrados apenas trabalhos produzidos no exterior. Também não temos conhecimento de trabalhos de mestrado ou doutorado produzidos no Brasil antes da década de 1990 que sejam especificamente voltados às questões relativas ao ensino dos números irracionais.

aspectos: conhecimentos de professores e alunos (DIAS, 2002; FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995; IGLIORI; SILVA, 1998; REZENDE, 2003; SILVA; PENTEADO, 2009), tratamento dado ao tema pelos livros didáticos (LIMA, 2001; POMMER, 2012; SOUTO, 2010) e formação de professores de matemática (BERGÉ, 2008; MOREIRA; FERREIRA, 2012; SIROTIC; ZAZKIS, 2007; SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1999; ZAZKIS; SIROTIC, 2004).

Na educação superior, mais especificamente quando se trata da formação de professores de matemática, entendemos que a essas dificuldades e/ou insuficiências relatadas pelas pesquisas junta-se outro problema. Em geral, a formação inicial do professor de matemática não o capacita para ensinar números irracionais na educação básica, seja pela ausência do conteúdo nas grades curriculares, seja pela opção de tratar o assunto de maneira formal (FISCHBEIN; JEHIAN; COHEN, 1995; IGLIORI; SILVA, 1998; DIAS, 2002; REZENDE, 2003; PENTEADO, 2004; LIMA, 2001; SOUTO, 2010; POMMER, 2012; SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1999; ZAZKIS; SIROTIC, 2004; SIROTIC; ZAZKIS, 2007; BERGÉ, 2008; MOREIRA; FERREIRA, 2012).

Escolhemos a formação de professores porque a entendemos como um processo apropriado para começar a romper um ciclo vicioso que, a nosso ver, encontra-se estabelecido: o egresso da educação básica ingressa na licenciatura sem uma conceituação adequada de números irracionais → o recém-formado professor sai da licenciatura em matemática sem uma formação que lhe forneça subsídios para ensinar números irracionais de forma adequada para a educação básica → o egresso da educação básica ingressa na licenciatura sem uma conceituação adequada de números irracionais... e assim fecha-se o ciclo.

É nesse sentido que esse livro pretende contribuir, oferecendo na Parte I o mínimo do aporte teórico que julgamos necessário para que o professor possa enfrentar o tema com segurança; na Parte II trazemos um pouco da história e da filosofia subjacentes ao conceito de número irracional; na Parte III buscamos suprir outra enorme lacuna observada no que se refere a material didático para tratar dos números irracionais – apresentamos algumas propostas de atividades e abordagens do assunto, acompanhadas de comentários e sugestões. Por fim, nos Apêndices, incluímos algumas questões que muitas vezes são deixadas de fora da formação inicial do professor de matemática, como demonstrações da irracionalidade de

$\sqrt{2}$ e π, além de propostas alternativas de abordagem dos números irracionais.

SUMÁRIO

Edifes

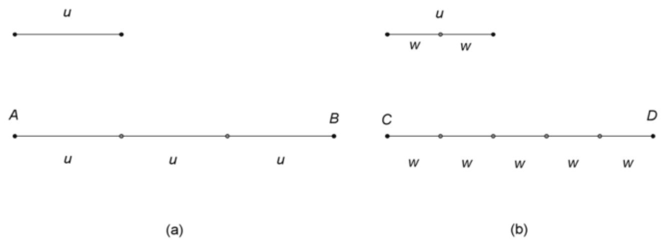
Parte I – Aspectos teóricos

1 - Medida de um segmento

A medida de um segmento AB, denotada por $\overline{AB}$, é um número que indica quantas vezes o segmento AB contém uma unidade de medida representada por um segmento u, previamente fixado. Três situações podem ocorrer. Na primeira situação, o segmento u cabe um número inteiro de vezes em AB. Ilustramos na Figura 1a o caso em que u cabe 3 vezes em AB. Podemos escrever que $\overline{AB} = 3u$ e, em geral, essa situação é representada por $\overline{AB} = mu$, onde m é um número inteiro. Na segunda situação, o segmento u não cabe um número inteiro de vezes em CD, mas um submúltiplo de u, isto é, algum segmento obtido da divisão de u em um número inteiro de partes iguais, cabe. Ilustramos na Figura 1b o caso em que dividimos o segmento u em 2 partes iguais, e essas partes, chamadas de w, cabem 5 vezes em CD. Nesse caso, como $\overline{CD} = 5w$ e $w = \frac{u}{2}$, podemos escrever que $\overline{CD} = \frac{5}{2}u$. Em geral, essa situação é representada por $\overline{CD} = \frac{m}{n}u$, onde m e n são números inteiros.

Via de regra, o segmento u tem comprimento igual a 1, e os dois casos ilustrados pela Figura **1** poderiam ser escritos de forma ainda mais simples como $\overline{AB} = 3$ e $\overline{CD} = \frac{5}{2}$. A terceira situação ocorre quando nenhum submúltiplo de u, por menor que seja, cabe um número inteiro de vezes em EF. Nos dois primeiros casos, isto é, $\overline{AB} = mu$ e $\overline{CD} = \frac{m}{n}u$, dizemos que os segmentos AB e CD são **comensuráveis** com u. No terceiro caso, dizemos que EF é **incomensurável** com u. Em uma linguagem menos formal, pode-se dizer que dois segmentos quaisquer são comensuráveis quando ambos podem ser medidos por uma mesma unidade de medida. De maneira análoga, dois segmentos quaisquer são ditos incomensuráveis quando **não** existe uma unidade de medida, por menor que seja, capaz de medir os dois segmentos. Porém, é preciso tomar cuidado com o uso da linguagem informal. Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (1996) alertam para o uso inadequado do termo incomensurável em frases como "havia um número incomensurável de formigas em nosso piquenique". Incomensurabilidade é uma relação entre duas grandezas e não dá a ideia de algo muito numeroso. Nas palavras de Lima *et al.* (1996), *nada é incomensurável, a não ser* *quando comparado com outro objeto (grandeza) da mesma espécie* (p. 55).

Figura 1 - Segmentos comensuráveis com a unidade



Fonte: Elaborada pelos autores[1].

Existe outra forma de caracterização da comensurabilidade que não coloca tanta ênfase na existência de uma unidade comum de medida dos segmentos. Ela está presente, mas, em princípio, o foco da comensurabilidade recai sobre a própria natureza dos segmentos, no caso, sobre os comprimentos desses segmentos. Trata-se do seguinte: dois segmentos AB e CD são comensuráveis se, e somente se, podemos escrever $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros, e $n \neq 0$. De fato, se AB e CD são comensuráveis, existem

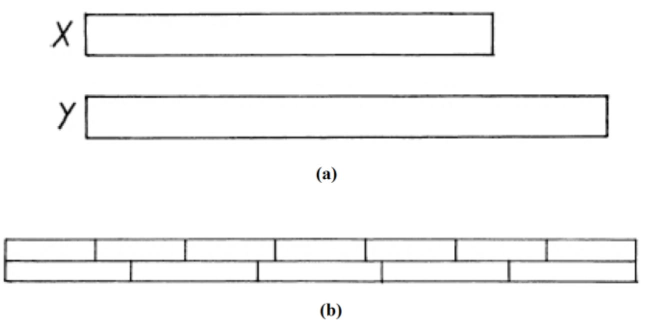
[1] Da Figura 1 em diante, as imagens que não apresentarem fonte e referência são de elaboração dos próprios autores.

u, m e n tal que $\overline{AB} = mu$ e $\overline{CD} = nu$, logo, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n}$. Reciprocamente, se $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n}$, temos $\overline{AB} = \frac{m}{n}\overline{CD} = m \cdot \frac{1}{n}\overline{CD}$. Chamando $u = \frac{1}{n}\overline{CD}$, temos $\overline{AB} = mu$ e $\overline{CD} = nu$.

A respeito dessa caracterização, encontramos em Dewdney (2000) uma forma de apresentá-la por meio de um jogo chamado de *jogo das réguas* (p. 29). Funciona da seguinte forma. Colocamos sobre uma mesa duas réguas, uma de comprimento X e outra de comprimento Y, de tal forma que as extremidades anteriores das duas réguas estejam alinhadas (Figura 2a). O jogo começa com a movimentação da régua menor, e a única regra a ser seguida é pegar a régua cuja extremidade anterior encontra-se mais à esquerda e deslizar para a direita exatamente pela distância de seu próprio comprimento. Se em algum momento as extremidades posteriores das duas réguas coincidirem, os segmentos serão comensuráveis e você ganha o jogo. Se nunca coincidirem, os segmentos serão incomensuráveis e você perde o jogo. A Figura 2b ilustra o caso em que 7 vezes o comprimento da régua X é igual a 5 vezes o comprimento da régua Y, isto é, $7X = 5Y$, ou ainda,

$\frac{X}{Y} = \frac{5}{7}$. Quanto à unidade de medida comum aos dois segmentos, basta notar que $\frac{X}{5} = \frac{Y}{7}$, ou seja, ao dividir a barra X por 5 e a barra Y por 7, obtemos partes do mesmo comprimento, que vale $1/35$.

Figura 2 - Jogo das réguas



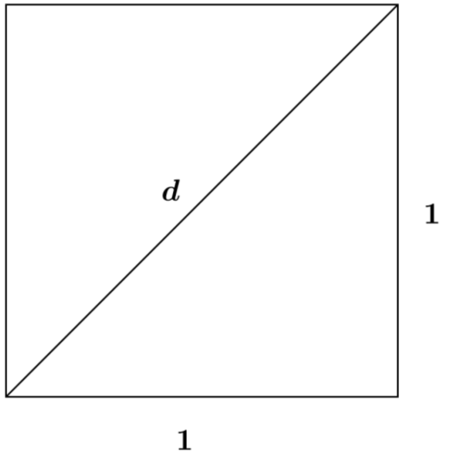
Fonte: DEWDNEY (2000, p. 29 e 33)

Segundo Dewdney (2000), os pitagóricos acreditavam que o jogo das réguas sempre acabava, mesmo que demorasse muito, isto é, pensavam que dois segmentos seriam sempre comensuráveis. Vamos mostrar que o referido jogo pode, de fato, não acabar. Como exemplo da existência de segmentos incomensuráveis, apresentamos o caso do lado (que consideraremos igual a 1) e da diagonal de um quadrado (ver Figura 3). Como vimos no parágrafo anterior, se a diagonal do quadrado, que chamaremos de d, é comensurável com o lado, podemos escrever $d = \frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros e a fração $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível[2]. Pelo Teorema de Pitágoras, $d^2 = 1^2 + 1^2$, e, substituindo $d = \frac{m}{n}$, teremos $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, ou seja, $m^2 = 2n^2$. Daí, seguem as seguintes implicações:

$$m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ é par} \Rightarrow m \text{ é par} \Rightarrow m = 2k \Rightarrow$$
$$(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow$$

$$2k^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ é par} \Rightarrow n \text{ é par, onde } k \text{ é um número inteiro.}$$

Figura 3 - Diagonal de um quadrado de lado igual a 1



[2] Fração em que não é possível simplificar, isto é, não existem fatores comuns a m e a n que possam ser cancelados.

Ora, chegamos a uma contradição, pois se m e n são números inteiros e $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível, m e n não podem ser ambos números pares, pois teriam ao menos um fator 2 em comum[3]. Portanto, a diagonal d é incomensurável com o lado 1, ou seja, não podemos escrever $d = \frac{m}{n}$ com m e n números inteiros. A existência de segmentos incomensuráveis aponta para a insuficiência dos números naturais e das frações para medir qualquer segmento de reta. Como definir, então, o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1? A solução encontrada pelos matemáticos foi ampliar o conceito de número e introduzir os chamados números irracionais[4].

A intenção com essa ampliação é que qualquer segmento de reta pudesse ser representado por um número. Assim, *quando o segmento considerado é comensurável com a*

---

[3] Essa demonstração pode ser feita de diversas outras formas, como aquela que usa diretamente o Teorema Fundamental da Aritmética, que estabelece que todo número inteiro maior do que 1 pode ser fatorado de forma única utilizando apenas números primos. Assim, a partir da expressão $m^2 = 2n^2$, já é possível concluir que se trata de um absurdo, pois o fator 2 aparece um número par de vezes do lado esquerdo e um número ímpar de vezes do lado direito. Optamos pela demonstração apresentada por entendermos que ela se utiliza de proposições mais elementares, como o quadrado de um número par é par e o quadrado de um número ímpar é ímpar.

[4] Essa ampliação não ocorreu de modo tão natural como porventura possa parecer. Ela se deu após um longo processo que durou vários séculos. Mais detalhes na Parte II.

unidade escolhida, sua medida é um número racional (inteiro ou fracionário). Os números irracionais representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade (LIMA *et al.*, 1996, p. 54). No nosso exemplo, a medida da diagonal do quadrado de lado 1 vale $\sqrt{2}$, pois, pelo Teorema de Pitágoras, $d^2 = 2$ (Figura 3). Assim, a demonstração que realizamos também é muito conhecida como a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$[5].

A medida de segmentos também pode ser utilizada desde muito cedo na educação das crianças. Uma ação nesse sentido foi proposta por Davydov[6] e colegas, que desenvolveram um currículo baseado na medição de segmentos nas décadas de 1960 e 1970 na Univão Soviética. Segundo Bass (2015), o currículo de Davydov postergou a introdução do número na instrução escolar, pois, para ele, *o problema fundamental resolvido pela invenção dos números é a tarefa de pegar uma dada quantidade (comprimento, volume, massa, área, uma quantidade discreta de objetos) e reproduzi-la em um*

[5] Para ver outras provas da irracionalidade de $\sqrt{2}$, ver Apêndice A – Prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

[6] Vasily Vasilovich Davydov (1930 - 1998) foi um psicólogo russo. Foi diretor do Instituto de Psicologia da Academia Russa de Educação.

tempo e espaço diferentes (p. 14-15, tradução nossa), sem a utilização de números para enumerar. Ou seja, essa tarefa pode ser considerada uma tarefa de medição de grandezas. Para exemplificar concretamente uma atividade construída segundo o pensamento de Davydov, trazemos Moxhay (2008):

> Em uma mesa está uma tira de papel. A tarefa é ir para outra mesa (em uma sala diferente) e cortar, a partir de um rolo de papel, um pedaço que tem exatamente o mesmo comprimento da tira original. Mas não é permitido levar a tira de papel para a outra mesa. Nos experimentos de Davydov, as crianças as vezes apenas caminhavam para a segunda mesa e cortavam um pedaço de papel de comprimento aleatório, na esperança que pudesse ter o mesmo comprimento da tira original. Nesses casos, as condições da tarefa faziam parecer para as crianças que uma solução correta é impossível (exceto pela sorte) (p. 7, tradução nossa).

A ideia, segundo Moxhay (2008), é que as crianças discutam em grupo como resolver a tarefa, e percebam que precisarão de um objeto intermediário, um terceiro objeto, como uma corda ou um pedaço de madeira, para que possam transportar o comprimento da tira de papel de uma sala à outra. As crianças podem então ter acesso a objetos, ora maiores, ora menores do que a tira a ser medida. Quando os objetos intermediários são menores do que a tira original, as crianças terão a chance de construir a noção de unidade de medida. Com uma atividade dessa natureza, também é possível dizer que as crianças terão a possibilidade de reconstruir a invenção do número como uma ferramenta humana que possibilita a reprodução de uma quantidade em um lugar e tempo diferentes.

No Brasil também temos propostas de ensino de números racionais via medição de segmentos para o ensino fundamental. Um exemplo de como colocar em prática uma proposta dessa natureza pode ser encontrado em Rezende, Mendonça e Pereira (2013). A partir de um material desenvolvido pelo professor Roberto Ribeiro Baldino conhecido como Frac-235, os autores apresentam uma sequência de atividades que proporcionam ao aluno construir a noção de medida. Além disso, Rezende, Mendonça e Pereira (2013) mostram como utilizar o Frac-235 para trabalhar com a equivalência de frações, além das operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de frações.

2 – Representação de números racionais e irracionais

A representação está diretamente relacionada ao reconhecimento, na medida em que os conceitos matemáticos só são acessíveis por meio de suas representações (DUVAL, 2003). Número racional é todo número que pode ser representado por uma fração $\frac{a}{b}$, sendo a e b números inteiros e $b \neq 0$. A representação decimal é uma forma compacta de escrever um número como uma soma de frações cujos denominadores são $10, 100, 1000, \ldots$, que são chamadas de frações decimais. Por exemplo:

$$\frac{5}{4} = \frac{125}{100} = \frac{100}{100} + \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 1{,}25$$

$$\frac{7}{8} = \frac{875}{1000} = \frac{800}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = 0{,}875$$

Porém, um número racional na forma irredutível a/b terá uma representação decimal finita (como os exemplos acima) se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5[7]. Vejamos o caso de $\frac{1}{3}$, vamos tentar escrever essa fração como uma soma de frações decimais. Começamos nos perguntando quantos décimos cabem em $\frac{1}{3}$? Isto é equivalente a fazer

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10}$$

$$3a = 10$$

$$a = \frac{10}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$

Ou seja, retornando à primeira igualdade teremos

$$\frac{1}{3} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{10} = \frac{3}{10} + \frac{\frac{1}{3}}{10}$$

O que nos leva a descobrir que cabem 3 décimos em $\frac{1}{3}$, e sobra $\frac{\frac{1}{3}}{10}$, que é menor do que um décimo. A pergunta seguinte seria: quantos centésimos cabem em $\frac{\frac{1}{3}}{10}$? Isto é equivalente a escrever

[7] Para uma demonstração dessa proposição, sugerimos a leitura de Niven (1990) nas páginas 29, 30 e 31.

$$\frac{\frac{1}{3}}{10} = \frac{b}{100}$$

$$10b = \frac{100}{3}$$

$$b = \frac{10}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$

Ou seja,

$$\frac{\frac{1}{3}}{10} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{100} = \frac{3}{100} + \frac{\frac{1}{3}}{100}$$

Isso nos mostra que cabem 3 centésimos em $\frac{\frac{1}{3}}{10}$, e sobra $\frac{\frac{1}{3}}{100}$, que é menor do que um milésimo. A pergunta seguinte seria: quantos milésimos cabem em $\frac{\frac{1}{3}}{100}$? O processo, como pode-se notar, não termina, e a solução encontrada é escrever que

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = 0{,}333\ldots$$

A representação obtida é uma decimal periódica infinita, também chamada de dízima periódica. A parte dessa representação que se repete indefinidamente é chamada de período, e pode ser formada por mais de um algarismo, como por exemplo:

$$\frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots \quad \text{(o período é 45)}$$

$$\frac{1000}{999} = 1{,}001001001\ldots \quad \text{(o período é 001)}$$

Existem casos de as representações infinitas possuírem também uma parte não-periódica, como exemplo:

$$\frac{37}{30} = 1{,}2333\ldots \quad \text{(o período é 3)}$$

Isso nos leva a fazer uma classificação das dízimas: simples – toda a parte decimal do número é periódica; composta – existe uma parte não-periódica que antecede o período. Exemplos:

$$\frac{875}{999} = 0{,}875875875\ldots \quad \text{(dízima periódica simples)}$$

$$\frac{139}{33} = 4{,}2134343\ldots \quad \text{(dízima periódica composta)}$$

Uma forma mais simples de argumentar que uma fração como $\frac{1}{3}$ não pode ser escrita como uma soma finita de frações decimais é por meio da fatoração em números primos. A questão central é que não existe uma fração equivalente a $\frac{1}{3}$ cujo denominador seja uma potência de 10. De fato, isso não é possível, pois nenhum múltiplo de 3 pode ser igual a uma potência de 10. Caso ocorresse, teríamos $3x = 10^n$, ou seja, $3x = 2^n 5^n$, onde x e n são números inteiros. Pela fatoração única em primos, a equação anterior não tem uma solução inteira para x, pois um fator 3 sempre sobrará do lado esquerdo da igualdade. A solução encontrada foi escrever frações como $\frac{1}{3}$ como uma soma infinita de frações decimais, conforme mostramos anteriormente.

A indefinição causada pela notação com os três pontos ao final do número é algo que precisa ser mencionado. Ao encontrar o número $0{,}23123\ldots$, pode-se afirmar que se trata de uma dízima periódica? Em caso afirmativo, qual seria o período? Em caso negativo, o que é preciso para ser considerada uma dízima periódica? Para remediar essa situação, alguns autores de livros didáticos estabelecem um acordo que, para uma representação ser considerada dízima periódica, deve-se repetir o período 3 vezes, como, por exemplo, $0{,}333\ldots$; $0{,}454545\ldots$ e $1{,}001001001\ldots$ Em muitos casos, essa questão não é explicitamente acordada, mas costuma ser posta em prática por meio de exemplos e exercícios, e os estudantes acabam assimilando esse acordo. É o que chamamos de acordo tácito. Para dar uma solução mais consistente à questão da representação, algumas fontes como Niven (1990) preferem usar uma barra para indicar que se trata de uma parte periódica, ao invés dos três pontos. Nesse caso, escreve-se $0,\overline{3};\ 0\overline{45}$ e $1,\overline{001}$.

Mas qual é o verdadeiro significado de uma igualdade como
$\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots$? A soma de infinitas frações decimais é apenas uma aproximação de $\frac{3}{11}$? A resposta é não, a soma é de fato igual a $\frac{3}{11}$. Mas, como se trata de uma soma infinita, é preciso tecer alguns comentários a respeito dessa igualdade, que geralmente causa estranheza aos estudantes. O significado é esclarecido em Lima (1991):

> As frações decimais $0{,}27;\ 0{,}2727;\ 0{,}272727$ etc constituem valores aproximados da fração ordinária $3/11$. Quanto maior for o número de algarismos decimais tomados, menor será o erro cometido (isto é, melhor será a aproximação). Por isso, quando escrevemos $\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots$, não estamos afirmando que $\frac{3}{11} = 0{,}2727$. As reticências no fim do símbolo $0{,}272727\ldots$

> significam que ele não representa uma única fração decimal, mas a sequência infinita de frações decimais acima, as quais são valores aproximados de $3/11$ (p. 160).

Pode-se então afirmar o seguinte: um número é racional se, e somente se, sua representação decimal é finita ou infinita periódica. Ou, equivalentemente, todo número racional possui uma representação decimal finita ou infinita periódica, e, reciprocamente, toda decimal finita ou infinita periódica pode ser convertida em um número racional.

Apesar de ser uma questão importante para o propósito deste livro, optamos por deslocar a demonstração das afirmações acima para o Apêndice E para não comprometer a fluidez do texto e para não nos afastar do objetivo nesse momento, que é definir a representação decimal dos números irracionais. Pois bem, convencidos de que as afirmações antecedentes são verdadeiras, podemos dizer que a representação decimal dos números irracionais não pode ser finita nem infinita e periódica, pois se trata de uma exclusividade dos números racionais. Ela deve ser uma decimal infinita e não-periódica. Mas isso existe de fato? Ou não passa de uma aberração teórica? Os livros didáticos, em geral, não discutem esse ponto; apenas afirmam que as dízimas não-periódicas existem. Nós, professores, precisamos colocar essas dúvidas para os alunos.

Podemos explorar como seria a representação decimal de $\sqrt{2}$. Como se trata de um número cujo quadrado é igual a 2, começamos assim:

É 1? Não, o quadrado de 1 é 1. É 2? Não, o quadrado de 2 é 4. Então está entre 1 e 2. É 1,5? Não, o quadrado de 1,5 é 2,25. Então é menor do que 1,5. É 1,4? Não, o quadrado de 1,4 é 1,96. Então é maior do que 1,4. É 1,41? Não, o quadrado de 1,41 é 1,9881. Então é maior do que 1,41. É 1,412? Não, o quadrado de 1,412 é 1,993744. Então é maior do que do que 1,412. E assim por diante.

O que se pode afirmar a respeito do processo acima? Ele acaba? Encontraremos uma dízima periódica? Nem uma coisa nem outra. Como provamos anteriormente que $\sqrt{2}$ é um número irracional e que a representação finita ou infinita periódica é uma exclusividade dos números racionais, podemos afirmar que o processo acima não acaba e nem se tornará periódico. Este é o significado da igualdade

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097 \ldots$$

Nesse ponto, apontamos um equívoco que acontece com frequência. Trata-se de uma inversão na argumentação anterior, que consideramos prejudicial para o ensino: a partir da representação decimal de $\sqrt{2}$, que a princípio apenas parece infinita e não-periódica (mas só uma demonstração poderia garantir isso), afirma-se que se trata de um número irracional. Esta prática inclusive pode estar na raiz de algumas dificuldades que foram detectadas em Broetto (2016). Nessa pesquisa, vários sujeitos classificaram frações de inteiros cuja representação decimal tinha um período grande, e por isso difícil de ser detectado, como números irracionais.

Além da representação decimal, existem algumas representações alternativas que podem ser exploradas em sala de aula como um recurso extra. Uma delas é a representação por meio de frações contínuas, para a qual sugerimos a leitura de Pommer (2009). Outras questões interessantes a respeito da representação podem ser encontradas na literatura, como o paralelo estabelecido em Britt (1998) entre a representação decimal de um número irracional e um gráfico com uma assíntota. Nesse caso, os estudantes precisam ter noções de limites de funções.

3 – Definição de números racionais e irracionais

No dia a dia, quando dizemos que algo é irracional, em geral queremos dizer que se trata de algo desprovido de bom senso, contrário à razão. Isso está de acordo com o significado da palavra irracional no dicionário: ***1.*** *Que não é racional, oposto à razão.* **2.** *Que não raciocina.* **3.** *Que não tem a faculdade do raciocínio.* ***4.*** *Em oposição ao homem, diz-se dos outros animais cujo comportamento é determinado pelo instinto*[8]. Na matemática, porém, o significado dessa palavra é bem diferente. O significado matemático para número irracional refere-se à ausência de uma razão do tipo a/b em que a e b são números inteiros e $b \neq 0$ (NIVEN, 1990). No que se refere especificamente a uma definição de número irracional, ela vai depender do nível de ensino, conforme apresentamos a seguir.

3.1 – Na matemática básica

As definições para números irracionais mais frequentemente encontradas em livros didáticos de matemática da educação básica são as seguintes: i)

---

[8] Fonte: http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=irracional. Consulta em 06/01/2016.

números que não podem ser representados como frações de inteiros; ii) números cuja representação decimal é infinita e não-periódica; iii) números reais que não são racionais (POMMER, 2012; SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1999; SOUTO, 2010).

Existem segmentos – como a diagonal de um quadrado de lado 1 – que não podem ser medidos/escritos/representados por uma fração de inteiros, o que justifica a definição ‘i’ apresentada acima. A definição ‘ii’ seria uma consequência da definição ‘i’; a definição ‘iii’ baseia-se em uma prática comum de definir os números reais como a união dos racionais com os irracionais, como discutido por Cezar (2014, 2011), enquanto concepção majoritária apresentada por professores da educação básica, atores de suas pesquisas. Contudo, apesar de serem as definições mais usadas, há uma série de apontamentos que precisam ser feitos. Não temos a intenção de censurar essas definições, mas chamar a atenção para alguns detalhes que muitas vezes passam despercebidos.

Primeiro, destacamos um aspecto comum das três definições, que é a caracterização do número irracional em termos do que ele NÃO é. Não é uma fração de inteiros, não é uma decimal finita, não é uma decimal infinita periódica e não é um número racional. Definir o número irracional pelo que ele NÃO é o torna um objeto ainda mais misterioso, um não-ser, a antimatéria do número racional[9], podendo provocar sérios danos na estruturação dos conceitos matemáticos e na possível compreensão desses números pelos estudantes. É possível, por exemplo, de acordo com as definições 'i' e 'ii', considerar números complexos da forma $a + bi$, $b \neq 0$, como números irracionais, já que não podem ser escritos como uma fração de inteiros.

Segundo, uma não-fração ou uma dízima não-periódica são elementos estranhos para os alunos cujo universo numérico ainda é composto apenas pelos números racionais, e não faz qualquer sentido para eles definir um número dessa forma (MOREIRA; DAVID, 2010). De acordo com Moreira e David (2010), *trata-se de uma situação análoga àquela de procurar no dicionário o sinônimo para uma palavra cujo significado não conhecemos e encontrar apenas duas palavras, as quais, também, não sabemos o que significam* (p. 82).

---

[9] Talvez seja sintomático o fato de não existir um símbolo consolidado para representar os irracionais, como no caso dos naturais, inteiros, racionais e reais, representados por $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, respectivamente. Alguns autores usam a letra I, outros usam Ir, enquanto outros ainda representam os irracionais como $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, reforçando ainda mais o irracional como um não-ser-racional.

Terceiro, *embora essas definições sejam familiares, convenientes e inofensivas, elas são bastante inúteis na prática*[10] (HAVIL, 2012, introdução, tradução nossa). Como usá-las, por exemplo, para definir a igualdade ou realizar operações aritméticas entre dois irracionais, se o que sabemos a respeito desses números é só o que eles não são? Além disso, por meio dessas definições, *os irracionais são definidos em termos de uma de suas qualidades características, não como entidades no seu direito próprio. Quem pode dizer que eles existem de fato?*[11] (HAVIL, 2012, introdução, tradução nossa).

Especificamente em relação à definição 'iii', não são utilizados conceitos ou ideias estranhas para os alunos como dízima não-periódica ou a existência de números além das frações. Mas, em contrapartida, o conjunto dos números reais é mencionado, o que nos leva a presumir que a definição 'iii' seja apresentada após algum trabalho realizado com os números reais. E como são definidos os números reais? Em geral, como a união dos racionais com os irracionais. Daí, forma-se uma circularidade e, no final das contas, não se sabe direito nem o que é número

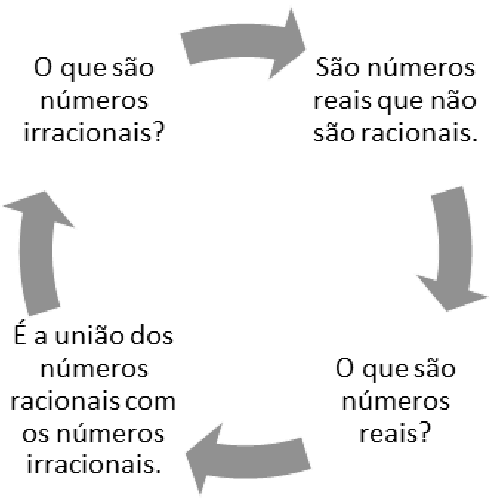
---

[10] "Although these are familiar, convenient and harmless definitions, they are quite useless in practice."

[11] "Irrational numbers are being defined in terms of one of their characteristic qualities, not as entities in their own right. Who is to say that they exist at all?"

real nem o que é número irracional (MOREIRA, 2004; PASQUINI, 2007; POMMER, 2012; REZENDE, 2003; SILVA, 2011), conforme ilustramos na Figura 4.

Figura 4 - Circularidade na definição de números reais e irracionais



Uma possibilidade diferente de se definir os números irracionais que é pouco difundida nos livros didáticos é apresentada por Havil (2012). Observe inicialmente que todo número racional r pode ser escrito da forma $r = \frac{(r-1)+(r+1)}{2}$, ou seja, ele está a uma igual distância de outros dois números racionais, $r-1$ e $r+1$. Feita essa observação, os números irracionais podem ser definidos como *o conjunto dos números reais cujas* *distâncias a todos os números racionais são diferentes*[12] (HAVIL, 2012, introdução, tradução nossa). Ou seja, não existe um número irracional equidistante de dois números racionais. No entanto, como o próprio Havil (2012) adverte, as dificuldades com essa definição não são menores do que com as definições mais comuns.

Quando ensina números irracionais, um dos maiores desafios do professor de matemática pode ser o de convencer seus alunos a respeito da existência desses números. As definições apresentadas anteriormente, inclusive a de Havil (2012), não contribuem para tornar essa tarefa mais fácil. Falta um estatuto próprio para os números irracionais, algo que os traga à luz e os defina afirmativamente, ou seja, não como a negação de alguma coisa. Uma das possibilidades de estabelecimento desse estatuto, e, consequentemente, da superação da visão dos números irracionais como um não-ser-racional, passa pela noção de incomensurabilidade e pela medição de segmentos.

Manuais escolares da segunda metade do século XIX até as primeiras décadas do século XX procediam dessa forma (GOMES, 2005; LIMA, 2001). Além de evitar os problemas que apontamos, como a circularidade e a

[12] "The set of all real numbers having different distances from all rational numbers."

nebulosidade das definições, apresentar os números irracionais a partir da noção de medida de segmentos e da noção de incomensurabilidade apresenta algumas vantagens em relação a uma abordagem que trabalha com o número como quantidade discreta. Uma delas é que permite realizar uma discussão única em que aparecerão números naturais, inteiros, racionais e irracionais de uma forma natural, consequências inexoráveis do processo de medição. Outra vantagem de se trabalhar com a medida de segmentos é que os irracionais têm maiores chances de serem vistos como números, em pé de igualdade com todos os outros, e não como uma subcategoria de números, algo como uma aberração, um acidente ou situação indesejada, como detectado em Broetto (2016).

Atualmente, a abordagem mais frequente para os conjuntos numéricos na educação básica privilegia a visão do número como uma quantidade discreta. Em geral, inicia-se tomando os números naturais como resposta à necessidade humana de contar objetos. Mas, como a subtração de dois números naturais nem sempre é um número natural, amplia-se o conceito de número, dando origem aos inteiros. Em seguida, como a divisão de inteiros nem sempre é um número inteiro, resolve-se esse problema novamente com uma ampliação, dando origem aos racionais[13]. Porém, as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão com números racionais resultam em números racionais, e o mesmo argumento não pode ser usado novamente para estender o conceito de número. A extensão seguinte para os irracionais, e posteriormente para os reais, passará muito provavelmente pelo argumento da medição de segmentos.

De maneira intencional, começamos esse capítulo sob a perspectiva da medição de segmentos, e, em seguida, falamos da representação, para só depois tratarmos da definição. Fizemos isso porque entendemos que uma discussão inicial a respeito da medida de segmentos é capaz de criar um *ambiente problemático* (ROQUE; GIRALDO, 2014, p. 15) que dá suporte e oferece sentido à criação dos números irracionais, antes mesmo de sua definição. Portanto, a principal questão que se coloca, a nosso ver, não se refere ao uso das definições apresentadas no início desta seção. As definições para os números irracionais mais comumente oferecidas pelos livros didáticos talvez sejam as melhores definições possíveis para a educação básica. Preocupamo-nos mais

[13] A ampliação dos conjuntos para que as operações resultem em elementos do próprio conjunto visa alcançar uma propriedade dos conjuntos conhecida em matemática pelo termo ‘fechamento algébrico’.

com o que vem antes e depois dessas definições, com o que será feito com elas.

Se uma definição de números irracionais for a primeira coisa a ser apresentada aos alunos, não achamos adequado. Entendemos que é preciso um trabalho prévio capaz de criar uma problematização em torno do assunto, por exemplo, a partir da medição de segmentos. Após sua apresentação, também é preciso realizar algum trabalho, principalmente no que diz respeito a equivalência dessas definições. Isto é, o professor deve proporcionar situações em sala de aula para que os alunos compreendam que um número que não pode ser escrito como razão de inteiros tem, necessariamente, uma notação decimal infinita e não-periódica. Os estudantes também devem entender que a recíproca é verdadeira. Na verdade, antes disso, os alunos precisam compreender porque um número racional é representado por uma decimal exata ou infinita periódica[14]. Segundo Lima (2001),

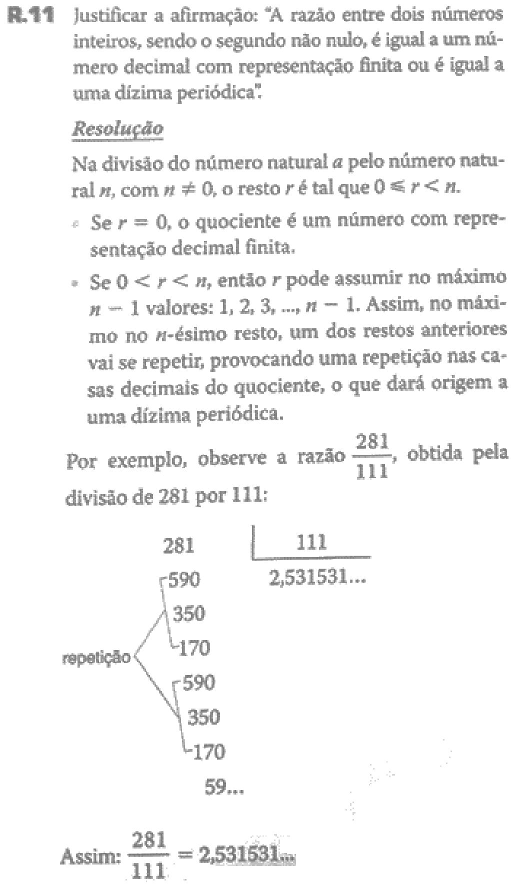
> É dito que um número racional pode ser representado por uma expressão decimal finita ou periódica, mas nenhum esforço é feito para justificar tal afirmação. Seria tão simples dar um exemplo (como 1/7) de divisão

[14] A recíproca, isto é, que toda decimal exata ou infinita periódica representa uma fração, é muito mais frequente nos livros didáticos.

> continuada do numerador *m* pelo denominador *n* e lembrar que só podem ocorrer *n* restos diferentes; daí a periodicidade (p. 8).

Frequentemente, a dízima periódica é alcançada em cada caso após a realização da divisão do numerador pelo denominador. Isso não prova que todo número racional será representado por uma dízima periódica. Para mostrar isso, é preciso usar um argumento capaz de generalizar a situação, como proposto por Lima (2001) no trecho destacado anteriormente. Até hoje, após várias buscas, encontramos apenas um livro didático editado no Brasil que traz um exercício ou atividade nessa linha de raciocínio. Trata-se de Paiva (2013), e o exercício em questão está na Figura 5.

Figura 5 - Equivalência de definições de números racionais



R.11 Justificar a afirmação: "A razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo, é igual a um número decimal com representação finita ou é igual a uma dízima periódica".

Resolução

Na divisão do número natural a pelo número natural n, com $n \neq 0$, o resto r é tal que $0 \leq r < n$.

- Se $r = 0$, o quociente é um número com representação decimal finita.
- Se $0 < r < n$, então r pode assumir no máximo $n - 1$ valores: $1, 2, 3, ..., n - 1$. Assim, no máximo no n-ésimo resto, um dos restos anteriores vai se repetir, provocando uma repetição nas casas decimais do quociente, o que dará origem a uma dízima periódica.

Por exemplo, observe a razão $\frac{281}{111}$, obtida pela divisão de 281 por 111:

Assim: $\frac{281}{111} = 2{,}531531...$

Fonte: PAIVA (2013, p. 29).

3.2 – Na matemática avançada

Na matemática avançada, o número irracional é costumeiramente tratado como o número real que não é racional. Porém, para conferir um tratamento mais rigoroso e também para evitar a circularidade que já discutimos anteriormente, são utilizados alguns procedimentos para definir os números reais sem mencionar os números irracionais. Como exemplo concreto, citamos Lima (1995), um livro bastante respeitado e bastante utilizado nos cursos de matemática brasileiros (licenciatura e bacharelado), nas disciplinas de análise real. Ele procede assim: define o que é um *corpo* – conjunto K munido de duas operações que satisfazem os *axiomas do corpo*; define *corpo ordenado* – um corpo cujos elementos positivos obedecem a certas condições; define *supremo* – a menor das cotas superiores de um conjunto; define *corpo ordenado completo* – corpo ordenado em que todo subconjunto não-vazio $X \subset K$, limitado superiormente, possui supremo em K; por fim, estabelece o axioma: existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado *corpo dos números reais* (p. 49-64). Procedendo assim, os irracionais aparecem como os elementos desse corpo que não são racionais.

Em um livro mais antigo, mas igualmente influente, encontramos um processo muito semelhante. Em Figueiredo (1973) é definido corpo, corpo ordenado, ínfimo – a maior das cotas inferiores de um conjunto – e, por último, define os números reais como um corpo ordenado onde se verifica o postulado de Dedekind: *todo* *subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ constituído de elementos positivos tem um ínfimo* (p. 17). Apesar de não usar o termo corpo ordenado completo, a estrutura criada em Figueiredo (1973) é exatamente a mesma criada em Lima (1995). Outro traço comum é a definição dos números reais por meio de um axioma, que é uma afirmação em matemática considerada auto-evidente e que dispensa demonstrações.

A respeito do significado dos números reais, existe uma postura comum entre os matemáticos de considerar que é suficiente dizer que se trata de um corpo ordenado completo. O primeiro exemplo vem de Michael Spivak, ao final do capítulo dedicado à construção dos números reais:

> É inteiramente irrelevante que um número real seja, por acaso, uma coleção de números racionais, e um fato como esse nunca deveria fazer parte da demonstração de nenhum teorema sobre números reais. Demonstrações aceitáveis devem usar apenas o fato que os números reais são um corpo ordenado completo (SPIVAK, 1967, p. 511–512).

O segundo exemplo vem de Elon Lages Lima, na introdução do capítulo que trata dos números reais:

> Faremos uma lista contendo vários fatos elementares a respeito dos números reais. Estes fatos serão admitidos como axiomas, isto é, não

> serão demonstrados. Deles deduziremos certas consequências, que demonstraremos como teoremas. Esses axiomas representam o conjunto ℝ dos números reais como um corpo ordenado completo. Frisamos que nosso ponto de vista coincide com o exposto na página 511 de Spivak [refere-se ao trecho de Spivak (1967) citado anteriormente]. Assim, um processo qualquer de construção dos números reais é importante apenas porque prova que corpos ordenados completos existem. A partir daí, tudo o que interessa é que ℝ é um corpo ordenado completo (LIMA, 1995, p. 47–48).

O significado dos números reais, e consequentemente dos números irracionais, pode surgir, por exemplo, no contexto de uma demonstração da existência dessa estrutura, como é sugerido por Lima (1995). A respeito dessas construções, as principais são as Sequências de Cauchy e os Cortes de Dedekind[15], que passamos a tratar a seguir. Para falar da primeira, apoiamo-nos em Aragona (2010).

Um número real é dado por uma expressão do tipo

---

[15] Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) e Richard Dedekind (1831-1916), o primeiro francês e o segundo alemão, figuram entre os principais responsáveis pelo reestabelecimento da análise matemática em bases rigorosamente formais, a exemplo do que os gregos faziam com a geometria. Os cortes de Dedekind e as sequências de Cauchy permitem construir os reais a partir dos racionais. Para mais detalhes do desenvolvimento histórico da análise, ver capítulo 3. Para ver todo o processo de construção dos números reais a partir dos Cortes de Dedekind, sugerimos a leitura de Caraça (1951) e/ou Ferreira (2011), e, a partir das sequências de Cauchy, sugerimos Aragona (2010).

$$d = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots \quad 0 \leq a_{i+1} \leq 9 \text{ e } a_0 \in \mathbb{N}$$

Por exemplo, $\sqrt{2} = 1{,}4142135 \dots$ ou $\frac{1}{3} = 0{,}333 \dots$

As igualdades anteriores são um tanto ambíguas em virtude das reticências. O significado dessas expressões são

$$d = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots$$

Pensando no caso em que d não é um número racional, qualquer que seja o número m de algarismos $a_1, \dots a_m$ após a vírgula, sempre teremos

$$d \neq a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_m}{10^m}$$

Mas cada expressão finita $x_m = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_m}{10^m}$ será uma aproximação de d e esta aproximação será melhor quanto maior for o número m. Esse é precisamente o significado das igualdades nas expressões com reticências acima. Dá ideia de como achar uma boa definição para números reais, uma sequência de racionais que aproximam um dado número real. Por exemplo, embora ainda não saibamos o que seja $\sqrt{2}$, sabemos que deverá ser um objeto matemático tal que a sequência de números racionais

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}4 = 1 + \dfrac{4}{10} \\ x_2 = 1{,}41 = 1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{10^2} \\ x_3 = 1{,}414 = 1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{4}{10^3} \\ \vdots \end{cases}$$

aproxima-se de $\sqrt{2}$. Estas sequências são sequências de Cauchy, $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{Q}$ tais que a distância de x_m a x_n pode ser tornada arbitrariamente pequena desde que m e n sejam suficientemente grandes. Por exemplo, a sequência que aproxima $\sqrt{2}$, se $m > n$ temos:

$$x_m = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots + \frac{a_m}{10^m}$$

$$x_n = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

$$dist\,(x_m, x_n) = x_m - x_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots \frac{a_m}{10^m}$$

$$= \frac{1}{10^{n+1}}\left(a_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{10} + \cdots + \frac{a_m}{10^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{10^n}$$

O que mostra que $dist\,(x_m, x_n)$ é tão pequena quanto se queira desde que m e n sejam suficientemente grandes. Uma sequência de Cauchy de números racionais arbitrária pode aproximar um número irracional (como (x_m) aproxima $\sqrt{2}$) ou um número racional como $1/3$, que é aproximado pela sequência de Cauchy

$0{,}3; 0{,}33; 0{,}333; \ldots$, ou 1, que é aproximado pela sequência de Cauchy $1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \ldots, 1+\frac{1}{m}, \ldots$

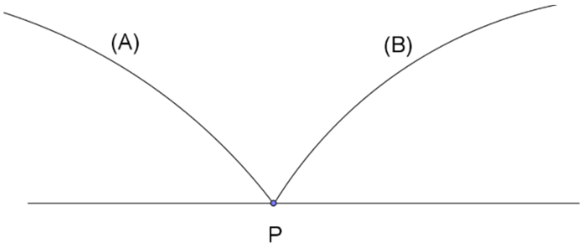
O verdadeiro problema é definir os irracionais, sendo supérfluo usar essa ferramenta sofisticada para definir os números racionais, porque sabemos o que é um número racional e porque a sequência seria óbvia: $x_0 = r$; $x_1 = r$; $x_2 = r$; $\ldots$; $x_m = r, \ldots$ Sendo assim, a definição de números reais em termos das sequências de Cauchy é a seguinte:

Número real é o conjunto de todas as sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que o aproximam (ARAGONA, 2010, p. 6).

Quanto aos Cortes de Dedekind, recorremos a Caraça (1951) para nos auxiliar. Deve-se a essa fonte o encadeamento das ideias que apresentaremos agora, com algumas modificações na notação e na linguagem utilizada. Seja P um ponto sobre uma reta. Em relação a esse ponto, todos os pontos da reta pertencem a apenas duas classes: classe (A) dos pontos que estão à esquerda de P; classe (B) dos pontos que estão à direita de P(Figura 6). O próprio ponto P pode ser colocado na classe (A) ou na classe (B), isso é indiferente. Definimos como **corte** qualquer partição da reta em duas classes (A) e (B) tal que: i) nenhum ponto da reta escapa à partição;

ii) todo ponto da classe (A) está a esquerda de todo ponto da classe (B). A notação utilizada será (A, B).

Figura 6 - Ilustração para um corte de Dedekind



Pode-se dizer, pelo que foi visto acima, que todo ponto P da reta produz nela um corte. E quanto à recíproca? Será que todo corte (A, B) é provocado por um ponto da reta? Isto é, existirá um ponto da reta que separa as classes (A) e (B)? Segundo Caraça (1951), Cantor descobriu nessa pergunta a essência da continuidade da reta, ou como ele diz, o *bom reagente da continuidade* (p. 60), e definiu o seguinte axioma, conhecido como axioma da continuidade de Dedekind-Cantor[16]: *todo corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte* (A, B)*, existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes* (A) *e* (B) (p. 60).

[16] Praticamente ao mesmo tempo que Richard Dedekind, o matemático George Cantor formulou a continuidade em termos bastante semelhantes (CARAÇA, 1951).

Passando da reta para o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, é possível definir o conceito de corte fazendo corresponder 'estar à esquerda' por 'ser menor que'. Assim, temos um corte no conjunto $\mathbb{Q}$ quando existirem duas classes (A) e (B) de números racionais tais que: i) todo número racional pertence a (A) ou a (B); ii) todo número que está em (A) é menor do que todo número que está em (B). Como exemplo, temos um corte em $\mathbb{Q}$ colocando (A) como a classe dos números racionais menores ou iguais a $3/5$ e (B) como a classe de todos os números racionais maiores do que $3/5$. Nesse caso, $3/5$ é o ponto que separa as duas classes.

O conjunto $\mathbb{Q}$ tem algumas propriedades semelhantes às propriedades de uma reta, como a infinidade de pontos, a densidade – entre dois pontos quaisquer da reta existem infinitos pontos da reta – e a ordenação. Daí, a pergunta crucial é a seguinte: do ponto de vista da continuidade, o conjunto de pontos da reta e $\mathbb{Q}$ têm a mesma estrutura? Para responder, verificaremos se $\mathbb{Q}$ satisfaz ao axioma da continuidade de Dedekind-Cantor, isto é, se todo corte no conjunto $\mathbb{Q}$ é provocado por um número racional.

Para investigar se isso acontece, basta efetuar um corte nos racionais com as seguintes classes: (A) são os números racionais cujo quadrado é menor do que 2; (B)

são os números racionais cujo quadrado é maior do que 2. É preciso verificar que, de fato, trata-se de um corte nos racionais, de acordo com a definição acima. O critério usado no corte é um critério bem definido, isto é, dado um número racional qualquer, ou seu quadrado é menor do que 2 ou seu quadrado é maior do que 2. O único número que escapa desse critério é o número cujo quadrado é igual a 2, mas, trata-se de um número que não é racional. Portanto, todo número racional pertence a (A) ou a (B). Quanto à segunda condição, ela também é satisfeita, pois $s^2 < 2 < r^2$ implica que $s < r$. Temos assim um corte efetivamente definido nos números racionais. Qual é o número racional que separa as duas classes? Não existe!

Dedekind então encerra a questão fazendo a seguinte definição:

> Chamo número real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional (CARAÇA, 1951, p. 62).

Para os leitores que se interessarem por uma construção passo-a-passo dos números reais, recomendamos a leitura de Ferreira (2011).

Os números reais também podem ser classificados como algébricos ou transcendentes. Os números reais algébricos são aqueles que são raiz de uma equação de coeficientes inteiros do tipo $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$. É imediato que todo número racional a/b é algébrico, já que é raiz da equação $bx - a = 0$. Entre os irracionais, $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{7}$, por exemplo, são algébricos, pois são raízes das equações $x^2 - 2 = 0$ e $x^3 - 7 = 0$, respectivamente. Os números reais que não são raízes de nenhuma equação com coeficientes inteiros do tipo $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$ são chamados de transcendentes. Como os racionais são sempre algébricos, essa classificação dos números reais também implica uma classificação dos irracionais em algébricos e transcendentes (NIVEN, 1990). Os exemplos de irracionais transcendentes, porém, não são triviais.

O matemático francês Joseph Liouville (1809 – 1882) foi o primeiro a estabelecer critérios que permitissem provar que um número é transcendente. Em 1851, a partir desses critérios, Liouville foi capaz de construir um número e provar em seguida se tratar de um número transcendente. O número de Liouville, como ficou conhecido, é

$\alpha = 0{,}110001000000000000000001...$, um número formado quase que na sua totalidade por zeros, e cujos ‘uns’ ocorrem nas casas decimais 1!, 2!, 3!, 4!... Para ver uma demonstração desse fato, recomendamos Marchiori (2013). Em seguida à transcendência do número de Liouville, provou-se a transcendência de π, e, dentre outros, que apresentaremos mais detalhes na seção 3 da Parte II.

Segundo Havil (2012), o conceito de número transcendente remonta ao século XVII, mais especificamente ao trabalho de Leibniz, que apontou em 1682 que $sen\, x$ não é uma função algébrica, isto é, não pode ser escrita como uma composição de potências, múltiplos, somas e raízes de x. O termo transcendente, no entanto, só surge no século XVIII com Euler, quando escreveu: *já que os logaritmos dos números que não são potências da base não são racionais nem irracionais*[17]*, é justo chamá-los de quantidades transcendentes. Por essa*

[17] Irracionais algébricos.

razão os logaritmos são ditos transcendentes[18] (EULER, 2012[19], apud HAVIL, 2012, capítulo 7, tradução nossa).

A teoria dos números algébricos e transcendentes permite comentar também, ainda que de passagem, a questão da insolubilidade dos três problemas clássicos da Antiguidade. O primeiro desses problemas, a duplicação do cubo, propõe a construção de um cubo com o dobro do volume de um cubo dado. O segundo problema, a trissecção do ângulo, propõe que se divida um ângulo qualquer dado em três ângulos congruentes. O terceiro problema, a quadratura do círculo, sugere que se construa um quadrado com a mesma área de um círculo dado. Todas as construções devem ser feitas apenas com régua (sem graduação) e compasso.

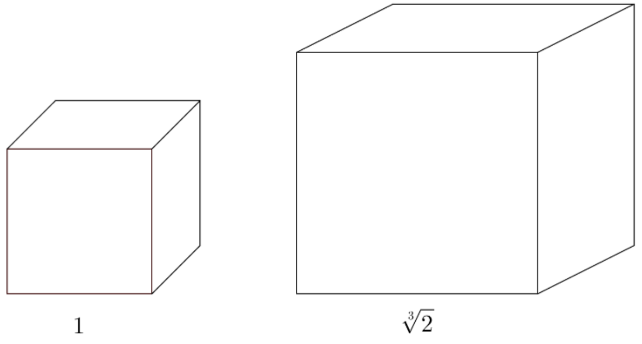
Com régua e compasso, tudo o que podemos construir são números algébricos de grau 2^n, isto é, números que são soluções de equações algébricas de grau 1, 2, 4, 8, ... No caso da duplicação do cubo, se o cubo dado tem aresta medindo uma unidade, resolver este problema significa construir o número algébrico $\sqrt[3]{2}$, de grau ímpar

[18] "Since the logarithms of (rational) numbers which are not powers of the base are neither rational nor irrational, it is with justice that they are called transcendental quantitites. For this reason logarithms are said to be transcendental."

[19] EULER, Leonhard. **Introduction to analysis of the infinite**. Book 1. Springer Science, 2012. Publicado originalmente em 1744.

(Figura 7). No caso da quadratura do círculo, dado um círculo de raio 1, sua área é π, e deve-se construir um quadrado com lado $\sqrt{\pi}$, que é um número transcendente, impossível de ser construído com régua e compasso. Para ver o caso da trissecção do ângulo, assim como os detalhes a respeito dos números que podem ser construídos com régua e compasso, direcionamos o leitor para Niven (1990).

Figura 7 - O problema da duplicação do cubo



5 – Propriedades

Selecionamos duas, dentre diversas propriedades dos números irracionais, por consideramos que sejam aquelas que diferenciam os números irracionais dos racionais. Trataremos a seguir brevemente da densidade e da não enumerabilidade dos números irracionais.

5.1 - Densidade

Um conjunto X é chamado denso em $\mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ possui algum ponto de X. O conjunto dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$, pois em qualquer intervalo de números reais existe um número racional. O mesmo acontece com os números irracionais, isto é, em qualquer intervalo de números reais existe um número irracional. As demonstrações dessas propriedades dos racionais e irracionais podem ser encontradas em qualquer livro de análise real e, em geral, são apresentadas em disciplinas avançadas dos cursos de licenciatura em matemática, como fundamentos de análise.

Quando se trata da densidade dos números irracionais e, consequentemente dos números reais, uma das grandes dificuldades que precisam ser superadas no ensino diz respeito a uma falsa impressão e/ou uma falsa conclusão a que podem chegar alguns estudantes. Isso se deve porque muitos estudantes já sabem que entre dois racionais existe outro racional e, assim, intuitivamente, parece claro que um conjunto denso como os racionais preenche toda a reta numérica. Como dito por Courant e Robbins (2000):

> O sistema de pontos racionais, embora seja denso sobre a reta, não cobre toda a reta numérica. Para uma pessoa ingênua, deve certamente parecer muito estranho e paradoxal que um conjunto denso de pontos racionais não cubra toda a reta. Nada em nossa "intuição" pode nos ajudar a "enxergar" os pontos irracionais como distintos dos racionais (p. 69).

Sendo assim, faz-se necessário 'ajudar' nossa intuição e mostrar, por exemplo, que entre dois números racionais existe um número irracional. Porém, antes de mostrar isso, é preciso discutir um pouco de operações básicas com números irracionais. Aliás, trata-se de uma boa oportunidade para fazer isso, ou, se já houver sido trabalhado, para rever a soma, subtração, produto e divisão de números racionais e irracionais.

Os números racionais são fechados em relação à soma, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero). Isso significa que quando realizamos essas operações com dois números racionais, o resultado é um número racional. Os irracionais, por sua vez, não possuem nenhuma dessas propriedades. As operações com números irracionais podem resultar em um número irracional, mas também podem resultar em um número racional. Porém, para ver isso, é preciso antes tratar das operações envolvendo um racional e um irracional. Quando operamos com um racional e um irracional, o resultado é sempre um número irracional. Para ver isso, seja α um número irracional e r um número racional diferente de zero. Considere os seguintes números:

$$r_1 = \alpha + r, r_2 = \alpha - r, r_3 = r - \alpha, r_4 = r\alpha, r_5 = \alpha/r \text{ e } r_6 = r/\alpha.$$

Se todos esses números são racionais, então também são racionais

$$r_1 - r = \alpha, r_2 + r = \alpha, r - r_3 = \alpha, r_4/r = \alpha, r_5 \cdot r = \alpha \text{ e } r/r_6 = \alpha.$$

Isso é uma contradição, já que, por hipótese, α é um número irracional. Portanto, somar, subtrair, multiplicar ou dividir um racional com/por um irracional sempre resultará em um número irracional (NIVEN, 1990). Feito isso, podemos agora mostrar o que pode acontecer quando operamos com dois irracionais. Faremos isso por meio de exemplos.

A soma de dois números irracionais pode ser um número irracional ou um número racional.

$$\underbrace{(2 + \sqrt{2})}_{\text{irracional}} + \sqrt{2} \text{ é um número irracional;}$$

$$\underbrace{(2 - \sqrt{2})}_{\text{irracional}} + \sqrt{2} \text{ é um número racional.}$$

A multiplicação de dois números irracionais pode ser um número irracional ou um número racional.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \text{ é um número irracional;}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4 \text{ é um número racional.}$$

A divisão de dois números irracionais pode ser um número irracional ou um número racional.

$$\sqrt{3}/\sqrt{2} \text{ é um número irracional;}$$

$$\sqrt{8}/\sqrt{2} = 2 \text{ é um número racional.}$$

Agora, estamos prontos para trabalhar um pouco mais com a densidade, inspirados pelo sítio *Khanacademy*[20]. Começamos observando que o número $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é um número irracional, pois é a divisão de um irracional por um inteiro, e está entre 0 e 1. Dados dois números racionais r_1 e r_2, com $r_2 > r_1$, procedemos assim:

---

[20] A Khanacademy é uma organização não governamental criada e sustentada por Salman Khan, um educador norte americano de origem bengali, cujo objetivo é promover educação gratuita por meio da produção e veiculação de vídeos de matemática, história, medicina e saúde, finanças, física, química, biologia, astronomia, economia, ciência da computação, entre outras matérias. O vídeo da Khanacademy que nos serviu de inspiração está disponível em https://pt.khanacademy.org/math/algebra/rational-and-irrational-numbers/proofs-concerning-irrational-numbers/v/proof-that-there-is-an-irrational-number-between-any-two-rational-numbers.

$$0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

$$0 < \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}} < r_2 - r_1$$

$$r_1 < r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}} < r_2$$

Como vimos anteriormente, $\frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}}$ será um número irracional, pois é o quociente de um racional por um irracional. Por sua vez, $r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}}$ é a soma de um racional com um irracional, e, portanto, também será um número irracional. Isso mostra que $r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}}$ é um número irracional localizado entre dois números racionais. Para mostrar agora que entre dois números irracionais quaisquer existe um número irracional, basta multiplicar a desigualdade anterior por $\sqrt{2}$, assim:

$$r_1\sqrt{2} < r_1\sqrt{2} + r_2 - r_1 < r_2\sqrt{2}$$

Como r_1 e r_2 são números racionais, $r_1\sqrt{2}$ e $r_2\sqrt{2}$ são números irracionais, pois o produto de um número racional por um número irracional é um número irracional. O número $r_1\sqrt{2} + r_2 - r_1$ é irracional, pois se trata da soma do irracional $r_1\sqrt{2}$ com o racional $r_2 - r_1$.

5.2 – Enumerabilidade e não-enumerabilidade

Dada a densidade em $\mathbb{R}$ dos números racionais e dos números irracionais, uma questão surge naturalmente: qual dos dois conjuntos tem mais elementos, os racionais ou os irracionais? Para responder a essa pergunta, precisamos fazer uma definição. Dizemos que um conjunto X é enumerável quando pode ser colocado em relação biunívoca com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. A relação biunívoca também é conhecida como relação um-a-um, isto é, para cada elemento em X existe um único elemento em $\mathbb{N}$. Exemplo de conjunto enumerável: os números pares.

$$1 \to 2$$

$$2 \to 4$$

$$3 \to 6$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$n \to 2n$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Da mesma forma, o conjunto dos números ímpares também é enumerável. Quando se trata de conjuntos infinitos, alguns fatos podem causar surpresa, como por exemplo, que o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ também é enumerável. A surpresa vem do fato de $\mathbb{N}$ estar contido em $\mathbb{Z}$, ou seja, de parecer, pelo menos a princípio, que $\mathbb{Z}$ é 'maior' do que $\mathbb{N}$. Mas não é. Vejamos como fica a relação biunívoca de $\mathbb{Z}$ com $\mathbb{N}$:

$$0 \to 0$$

$$1 \to -1$$

$$2 \to 1$$

$$3 \to -2$$

$$4 \to 2$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\text{naturais pares} \to \text{inteiros positivos}$$

$$\text{naturais ímpares} \to \text{inteiros negativos}$$

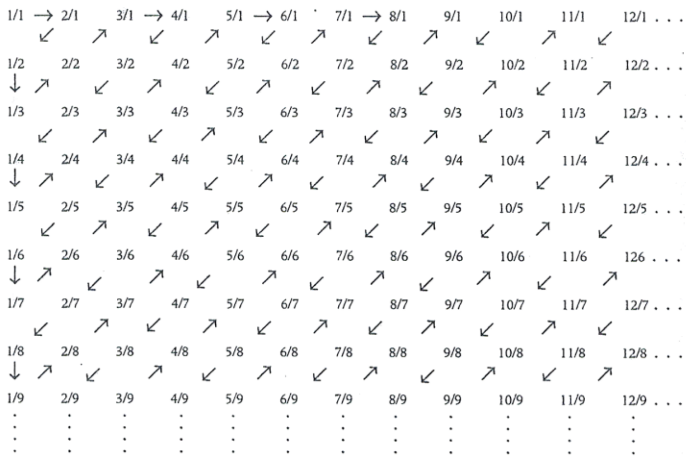
$$\vdots \quad \vdots$$

Talvez mais espantoso ainda possa ser o fato dos racionais serem enumeráveis, pois, além de conterem os inteiros, também são densos. A demonstração desse fato, conhecida como prova da diagonalização de Cantor, deve-se ao matemático russo Georg Ferdinand Ludwig

Philipp Cantor (1845 – 1918). A demonstração se inicia com a organização de todos os números racionais em uma matriz bidimensional como mostrada na Figura 8.

É importante observar que, embora não se possa escrever todos os números racionais, a organização proposta por Cantor permite chegar até o número racional que se queira. Por exemplo, o número $23/15$ estará localizado no cruzamento da 23ª coluna com a 15ª linha. Pois bem, a dificuldade da prova reside em como estabelecer uma relação biunívoca entre os números naturais e as frações dispostas nessa matriz. Cantor conseguiu resolver esse problema ao propor que ela fosse percorrida pelas diagonais, conforme ilustram as setas na Figura 8. A correspondência é a seguinte: 1/1 é associado a 1; 2/1 é associado a 2; ½ é associado a 3; 1/3 é associado a 4; 2/2 é associado a 5, e assim por diante. Portanto, como esse caminho pelas diagonais passará em cada número racional uma única vez, fica estabelecida uma relação biunívoca com os naturais, o que mostra que o conjunto dos números racionais é enumerável.

Figura 8 - Prova de Cantor para a enumerabilidade dos racionais



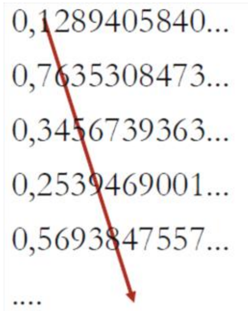
Fonte: ACZEL (2003, p. 104).

E quanto aos números irracionais? Será que também podemos contá-los de forma semelhante? Cantor também trabalhou para resolver esse problema e apresentou uma brilhante solução, que explicaremos agora. Cantor restringiu sua análise aos números irracionais do intervalo (0,1), e assumiu que existia um modo de listar todos esses números, sem se preocupar com alguma ordem especial, apenas com o fato de que todos os números irracionais desse intervalo estivessem lá. Dessa forma, sua hipótese é equivalente a assumir que os irracionais são enumeráveis.

A partir da hipótese de que todos as decimais infinitas e não-periódicas do intervalo $(0,1)$ podiam ser listadas (Figura9), Cantor construiu um número completamente diferente de todos os números listados. Ele procedeu assim: pegou o número formado a partir da diagonal – $0,16598\ldots$ – (ver Figura 9) e criou um novo número mediante a adição de 1 a cada dígito (se o número for 9, o dígito será mudado para 0). O novo número criado, $0,27609\ldots$ não está na lista acima, pois é diferente de cada número listado em pelo menos um dígito. Cantor provava assim, por contradição à sua hipótese, que o conjunto dos números irracionais não pode ser enumerado. A intenção de Cantor, na verdade, era mostrar que existem diferentes ordens de infinito. Com a demonstração acima ele conseguiu provar isso[21]. A ordem do infinito dos números irracionais é maior do que a ordem do infinito dos naturais, que é a mesma dos inteiros e dos racionais, conforme mostramos anteriormente. Dizemos que os números irracionais são **não enumeráveis**.

[21] Aczel (2003) conta essa e outras histórias referentes à busca de Cantor pelo infinito, e a ligação dessa busca com questões pessoais – espirituais e religiosas – do matemático.

Figura 9 – Prova da não enumerabilidade dos irracionais pela diagonalização de Cantor



Parte II – Aspectos históricos e filosóficos

Nesta parte, ampliamos a discussão em relação aos números irracionais, especificamente no que se refere à sua origem e ao seu desenvolvimento. Nesse sentido, a escolha da história e da filosofia pareceu-nos um caminho natural. Além de complementar os aspectos teóricos mais voltados à matemática em si (que apresentamos na Parte I), entendemos que a história e a filosofia podem oferecer contribuições valiosas à compreensão de alguns pontos fundamentais dos números irracionais, como as dificuldades atuais no ensino e na aprendizagem desse tema.

Muito mais do que um recurso didático para tornar as aulas mais ‘interessantes’ ou ‘atraentes’, entendemos que a história da matemática é capaz de dar sentido aos números irracionais, ao revelar as situações e as intenções envolvidas no desenvolvimento desse conceito. Além disso, pensamos que, ao mostrar a matemática como fruto de uma construção social, a história da matemática também pode contribuir para diminuir a atitude negativa que muitos estudantes têm em relação a essa disciplina. Uma passagem que nos inspirou, sobremaneira, principalmente quando pensávamos em incluir ou não alguns aspectos da história da matemática, foi a seguinte:

> Como uma pessoa que aprendeu matemática em todos os níveis universitários, estou ciente da atitude negativa de muitos estudantes em relação a esta disciplina. Existem vários motivos para isso, sendo um deles o modo esotérico e seco com que o tema é ensinado. Temos a propensão a sobrecarregar nossos estudantes com fórmulas, definições, teoremas e demonstrações, mas raramente mencionamos a evolução histórica desses fatos, deixando a impressão de que eles foram entregues à humanidade como os Dez Mandamentos, por alguma autoridade divina. A história da matemática é uma boa maneira de corrigir essa impressão (MAOR, 2008, p. 14).

Quanto à presença da filosofia da matemática, entendemos que ela se torna inevitável para tratar de questões colocadas pela própria matemática, mas que transbordam seus limites. Essas questões, em geral, não são questões de matemática, mas sim reflexões sobre a matemática, como por exemplo, qual a natureza do número? São meras invenções humanas ou sua existência é independente de nós? (SILVA, 2007). Além disso, as questões históricas que abordamos aqui também tornaram algumas reflexões filosóficas inevitáveis, como por exemplo, a evolução da ideia de rigor. Por que os matemáticos do século XIX consideraram que a matemática não se encontrava estabelecida em bases rigorosas?

A principal pergunta que pretendemos responder nessa parte é ‘como o conceito de número irracional se desenvolveu?’. Para tentar respondê-la, estudamos dois momentos cruciais para o desenvolvimento desse conceito. Um desses momentos ocorreu na Grécia antiga, a partir da ideia do incomensurável; o outro ocorreu no século XIX, a partir de um movimento que pode ser chamado de aritmetização da análise.

1 – Aritmetização da análise no século XIX

Os números irracionais tais como os conhecemos hoje são resultado de uma construção recente da matemática, ocorrida na transição do século XIX para o século XX. Porém, isso não quer dizer que os números irracionais surgiram recentemente; as ideias precursoras desse conceito, como a incomensurabilidade de dois segmentos, remontam ao século VI a.C. O que ocorreu no século XIX foi a mais recente atualização do conceito de número irracional, resultado de um movimento de discussão dos fundamentos dos sistemas numéricos. Para entender como se deu esse processo, é preciso conhecer os antecedentes desse movimento, que, mesmo sem uma definição considerada segura para os irracionais (pelos padrões atuais de rigor), promoveu uma série de avanços relativos aos números irracionais. Começamos na Idade

Média, deixando as origens do número irracional para a seção seguinte.

A manipulação algébrica de números irracionais se tornou intensa na Idade Média, pelas mãos dos matemáticos árabes. Além disso, eles também foram grandes divulgadores do zero e dos números negativos[22], assim como foram *os primeiros a manipular as raízes quadradas com algum grau de convicção* (HAVIL, 2012). O matemático árabe al-Kwarizmi (c. 825) se referia aos números racionais e irracionais como 'audíveis' e 'inaudíveis', respectivamente. Mais tarde, isso levou ao uso da palavra árabe *asamm*, que significa surdo ou estúpido, e que em latim foi traduzido pela palavra *surdus*. Diversos matemáticos, como Gerardo de Cremona (século XII), Leonardo Fibonacci (século XIII) e Robert Recorde (século XVI) usaram o termo *surdus* para se referir a raízes irracionais não resolvidas, o que chamaríamos hoje de raízes não exatas (SMITH, 1925).

[22] Existem diversos documentos que mostram que o desenvolvimento do conceito do zero ocorreu muito antes da Idade Média, e que babilônios, maias, indianos e chineses já manipulavam de alguma forma esse número, inclusive com um símbolo para ele (IFRAH, 2005). Quanto aos números negativos, apesar de não trabalhar com o objeto em si, Diofanto (século III) já utilizava a regra 'menos vezes menos dá mais'. Também para chineses e indianos, os números negativos estiveram presentes de alguma forma (KATZ, 2009).

A partir do século XVI, ocorreram diversos avanços, desde a introdução de tipos ainda desconhecidos de irracionais até questões de ordem prática, como o desenvolvimento de técnicas para efetuar a racionalização de denominadores, métodos para a extração de raiz quadrada e de aproximação por números racionais, entre outros. Alguns exemplos desses avanços são o trabalho de Michael Stifel (1487 – 1567) com irracionais do tipo $\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}}$, de Girolamo Cardano (1501 – 1576) com a racionalização de frações com raízes cúbicas, de François Viète (1540 – 1603) com uma expansão para π, entre outros (KLEIN, 1968). Também há que se destacar o trabalho realizado por Rafael Bombelli (1526 – 1572) em sua obra *L'Algebra Opera* de 1579. Ele estabeleceu métodos para aproximação de raízes quadradas por números racionais que utilizam o que hoje conhecemos como frações contínuas (ARCAVI, 1985).

O século XVI ainda presenciou um avanço que devemos destacar aqui. Apesar dos matemáticos árabes e hindus já terem conhecimento de raízes não reais alguns séculos antes, eles hesitaram em representar essas raízes. Coube a matemáticos italianos como Cardano e Bombelli a glória pelo desenvolvimento do 'imaginário' e, mais especificamente, foi Cardano o primeiro que ousou denotar o imaginário por um símbolo[23] (DANTZIG, 1970). Deste modo, os matemáticos italianos do século XVI foram os principais responsáveis por iniciar uma revolução que, alguns séculos mais tarde, seria concretizada pela expansão do próprio conceito de número. Assim,

> Estava estabelecida uma nova trilha para que a matemática pudesse enveredar na ampliação do campo numérico. Bastava, para isso, penetrar nesse portal imaginário e dar-lhe o significado necessário para o estabelecimento de um novo olhar sobre o mundo. Um olhar no qual estavam agora juntos, real e imaginário, sempre apoiados no real (MENDES, 2006, p. 77).

Todavia, o caminho aberto por Cardano no século XVI ainda esperaria alguns séculos para ser percorrido. A expansão do conceito de número foi um longo processo, e a aceitação do irracional como um número ainda era um problema; isto é, o irracional ainda não havia alcançado um *status* de número. Como exemplo, citamos dois trechos de trabalhos dos séculos XVI, contemporâneos a Cardano. O primeiro deles é de 1544 e foi retirado de

---

[23] O problema resolvido por Cardano em que aparecia pela primeira vez um número imaginário foi o seguinte: dividir 10 em duas partes cujo produto seja 40. A solução apresentada por Cardano foi $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$ (DANTZIG, 1970).

Arithmetica Integra, escrita pelo matemático alemão Michael Stifel:

> Na demonstração de figuras geométricas, quando os números racionais falham, os números irracionais tomam o seu lugar e provam exatamente aquelas coisas que os números racionais não puderam provar... nós somos compelidos a afirmar que eles são números verdadeiros, compelidos pelos resultados que seguem do seu uso – resultados os quais percebemos que são reais, certos e constantes. Por outro lado, outras considerações nos compelem a negar que os números irracionais sejam mesmo números. A saber, quando os submetemos à numeração (representação decimal), descobrimos que eles fogem eternamente, de tal forma que nenhum deles pode ser apreendido precisamente nele mesmo. Assim como um número infinito não é um número, um número irracional não é um número de verdade, pois permanece escondido em uma nuvem de infinito[24] (KLINE, 1972a, p. 251, tradução nossa).

---

[24] "Since, in proving geometrical figures, when rational numbers fail us irrational numbers take their place and prove exactly those things which rational numbers could not prove...we are moved and compelled to assert thta they truly are numbers, compelled that is, by the results which follow from their use – results which we perceive to be real, certain, and constant. On the other hand, other considerations compel us to deny thtat irrational numbers are numbers at all. To wit, when we seek to subject them to numeration [decimal representation]... we find thta they flee away perpetually, so that not one of them can be apprehended precisely in itself. Therefore, just as an infinite number is not a number, so na irrational number is not a true number, but lies hidden in a kind of cloud of infinity."

Ao mencionar o surgimento dos irracionais na geometria, Stifel provavelmente se refere a situações como o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 (ARCAVI, 1985). O tom da citação anterior é o de um conflito entre algo que aparece em determinadas situações, que resolve determinados problemas, mas que não se encaixava no conceito de número da época. Algo semelhante também pode ser notado na obra *De Oculta Parte Numerorum* do poeta e matemático francês Jacques Pelletier (1517 – 1582), publicada em 1560:

> Eles são, em qualquer caso, 'alguma coisa', e é certo que o seu uso é necessário, especialmente no tratamento de magnitudes contínuas. Eles são como números 'absolutos' genuínos, sujeitos a 'regras'. Sua relação com os números absolutos pode ser comparada com aquela dos animais com os homens: números irracionais têm uma comunicação muda e obscura com os números absolutos, que não difere daquelas feras, que além de ter impressões sensoriais, têm, à sua própria maneira, uma espécie de raciocínio assim como os homens. Apesar de tudo, eles são inexplicáveis e possuem apenas um tipo de existência sombria. Eles não devem ser contados entre os números, mas sua existência deve ser entendida como totalmente contida em sua

‘designação’[25](KLEIN, 1968, p. 290, tradução nossa).

A semelhança dos argumentos de Pelletier e de Stifel reside no fato de que os irracionais são percebidos como necessários, mas, ao mesmo tempo, existe uma resistência em aceitá-los como números, sendo resignados a uma ‘existência sombria’. Mesmo assim, isso não impediu que os estudos referentes a esses números continuassem avançando. No século XVIII, as questões de ordem prática relacionadas aos números irracionais continuavam em alta. Como exemplo, temos um método para aproximação de raízes quadradas desenvolvido por Nicholas Saunderson (1682 – 1739). O método em questão se tornou muito popular e foi

---

[25] “They are, in any case, ‘something’, and it is certain that their use is necessary (necessarium usum), especially ‘in laying off continuous magnitudes’ (praesertim in continuorum dimensionibus). They are, just like genuine ‘absolute’ numbers, subject to ‘rules’ (praeceptiones). Their relation to the ‘absolute’ numbers may be compared with that of the animals to man: ‘Habent igitur numeri irrationales cum absolutis obscuram quandam mutemque communicationem, non secus quam cum hominibus, bruta: quae praeter id quod sentiunt, suo etiam modo ratiocinantur’. (Irrational numbers, then, have a certain obscure and mute communication with absolute numbers, not differently from that which brutes, who besides having sense impressions, do, in their own way, even reason, have with men). All in all, they are inexplicable (inexplicabiles) and have only a kind of shadow existence. They must not be counted among the numbers, but their being must rather be understood as altogether containded in their ‘designation’ (appellatio).”

ensinado nas escolas por um longo período, até o advento das calculadoras eletrônicas[26].

Apesar da intensa manipulação de números irracionais na Idade Média pelos árabes, na Europa durante o Renascimento e até o século XVIII, isso não significa que houve algum progresso filosófico a respeito do assunto. Os números irracionais não eram vistos como números, apenas aceitava-se que podiam ser manipulados da mesma maneira que os números racionais (HAVIL, 2012). Para os padrões da matemática atuais, esse conhecimento essencialmente manipulativo não é suficiente, mas, para aqueles tempos, a validação dos métodos se dava em outro nível de referência, e um exemplo disso é o que aconteceu com o cálculo diferencial e integral. Até o início do século XIX, ideias fundamentais como limite, derivada e integral, não haviam recebido a fundamentação lógica que têm hoje. Desde a constituição do cálculo no século XVII, a fundamentação estava em baixa, por diversos motivos. Uma das possíveis causas aponta que os matemáticos

---

[26] Segundo Arcavi (1985), esse método já era conhecido e utilizado por Téon de Alexandria no século IV d.C., assim como por árabes, hindus e outros matemáticos na Idade Média. O mérito de Saunderson foi justificar o método, isto é, explicar como ele funciona. Para mais detalhes a respeito desse e de outros métodos de extração de raízes quadradas, recomendamos a leitura de Sousa (2013).

estavam muito ocupados e maravilhados com as aplicações do cálculo na mecânica, hidrodinâmica, elasticidade, acústica, balística, ótica, transmissão de calor e mecânica celeste. Não havia separação entre o cálculo e suas aplicações, entre análise matemática e física matemática, e os resultados empíricos validavam os métodos do cálculo diferencial e integral em outras bases (geométricas, físicas, entre outras) (ÁVILA, 2006).

> Um problema físico que se traduzia numa equação diferencial, como o movimento de um pêndulo ou as vibrações de uma corda esticada, já tinha garantida, por razões físicas, a existência e a unicidade da solução. Isso está exemplificado na produção dos mais importantes matemáticos do século [XVIII], dentre os quais destacam-se Leonhard Eüler e Joseph-Louis Lagrange (ÁVILA, 2006, p. 168).

Ou seja, podemos supor que no século XVII não havia necessidade de fundamentação matemática nos moldes que aconteceria no século XIX, quando essa situação começou a mudar. A preocupação com o rigor e com os fundamentos da matemática idealizados pelos gregos voltaria a ocupar as mentes dos matemáticos, por dois motivos principais. O primeiro deles foi o entendimento de que faltava clareza em relação aos fundamentos do sistema numérico, provocado pelo grande desenvolvimento da álgebra e da análise. Os trabalhos de

Bernard Bolzano (1781 – 1848) e de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) com as funções contínuas e de Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) com os limites de sequências foram os grandes responsáveis por expor, ainda que inadvertidamente, o quão intuitivas eram as bases de sustentação dos sistemas numéricos. O matemático alemão Karl Weierstrass (1815 – 1897) foi o primeiro a apontar que, para estabelecer cuidadosamente as propriedades das funções contínuas, era preciso constituir a aritmética do *continuum*, isto é, dos números reais (KLINE, 1972b).

O segundo motivo foi o surgimento de outras geometrias, conhecidas como geometrias não-euclidianas. Para entender a dimensão do abalo que essas construções causaram, temos que apresentar, ao menos em linhas gerais, os Elementos, o principal trabalho de Euclides, escrito por volta do século III a.C. Essa obra foi a primeira a abordar, de maneira sistemática, a matemática como uma ciência dedutiva, isto é, uma ciência em que todas as afirmações são deduzidas a partir de afirmações mais simples. Porém, Euclides sabia que era preciso começar de algum lugar, isto é, era preciso escolher um pequeno conjunto de afirmações que fossem consideradas verdades por qualquer pessoa. Tais afirmações não precisariam ser demonstradas porque são evidentes por si mesmas (CARMO, 1987).

Euclides elegeu cinco afirmações para iniciar sua geometria, as quais chamou de postulados (aquilo que se pode), que são os seguintes:

> 1 – Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto;
>
> 2 – Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;
>
> 3 – E, com todo centro e distância, descrever um círculo;
>
> 4 – E serem iguais entre si todos os ângulos retos;
>
> 5 – E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado, menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009)[27].

Os quatro primeiros postulados preenchem as características pretendidas por Euclides, de afirmações verdadeiras que são autoevidentes, mas o mesmo não se pode dizer do quinto postulado. De fato, durante alguns

[27] Os Elementos é um tratado matemático escrito por Euclides de Alexandria por volta do ano 300 a.C. A obra que estamos utilizando é uma tradução do grego para o português realizada pelo professor Irineu Bicudo.

séculos, suspeitava-se que o quinto postulado[28] poderia ser demonstrado a partir dos anteriores, o que o tornaria supérfluo. Contudo, apesar dos esforços de grandes matemáticos, nunca se conseguiu tal feito, até que no século XIX descobriu-se algo ainda mais surpreendente: a retirada desse postulado da lista de Euclides dava origem a geometrias inteiramente diferentes, como a geometria elíptica e hiperbólica, genericamente denominadas como geometrias não-euclidianas. A geometria, considerada há milênios como a *apoteose da verdade e da certeza* (LIVIO, 2010, p. 177), passava agora a ser vista apenas como um jogo lógico que depende das regras escolhidas. Ou seja, ao alterar uma única regra, o resultado é um jogo igualmente coeso e sem contradições, mas completamente diferente do jogo original. Criava-se assim uma espécie de mal-estar em relação aos fundamentos da matemática.

Para remediar a situação, era preciso escolher uma base forte para reerguer o edifício da matemática de forma segura, e o alicerce escolhido foi a aritmética. Por duas razões, os matemáticos se convenceram de que todas as

---

[28] O quinto postulado, ou quinto axioma, também ficou muito conhecido como 'axioma das paralelas', ou 'axioma de Playfair', devido ao enunciado equivalente proposto pelo matemático e geólogo escocês John Playfair (1748 – 1819): *por um ponto P fora de uma reta dada r, não passa mais que uma paralela a r* (CARMO, 1987).

teorias deveriam se fundamentar, em última instância, nos números naturais. A primeira é que todos os números poderiam ser construídos a partir dos números naturais de forma lógica e consistente. A segunda é que a própria geometria, outrora modelo de rigor e verdade, e que se encontrava abalada pelo surgimento de outras geometrias, poderia ser reconstruída de forma segura a partir da correspondência entre elementos geométricos e equações, ou seja, pela geometria analítica (ÁVILA, 2006).

Além dessas razões de ordem prática, a escolha dos números naturais como base de sustentação para todos os outros números estava permeada de questões de fundo filosófico. Uma dessas questões dizia respeito a dois componentes essenciais da matemática, a lógica e a intuição. Poincaré reconhece que existem dois tipos de espíritos diferentes na matemática, os que caminham passo a passo seguindo estritamente a lógica, e os que se deixam guiar pela intuição e conseguem importantes conquistas de forma rápida, como se fossem *ousados cavaleiros na linha de frente* (POINCARÉ, 1995[29], p. 13). Contudo, Poincaré (1995) também assinala que essas conquistas rápidas muitas vezes são precárias, pois a intuição não pode nos dar o rigor, nem mesmo a certeza.

[29] A edição que tivemos acesso é de 1995, porém, a primeira edição do livro é de 1905.

Poincaré escreve em 1905, claramente se referindo à crise de fundamentos ocorrida no século XIX, que a evolução se deu quando se percebeu que o rigor não poderia ser introduzido nos raciocínios se antes não estivesse nas definições.

> Por muito tempo os objetos de que se ocupam os matemáticos eram em sua maioria mal definidos; julgavam conhecê-los, porque os representavam com os sentidos ou com a imaginação; mas deles só tinham uma imagem grosseira, não uma ideia precisa sobre a qual o raciocínio pudesse atuar (POINCARÉ, 1995, p. 17).

Assim, a evolução a que Poincaré (1995) se refere várias vezes em seu texto aconteceu quando as definições passaram a não mais recorrerem à intuição, mas somente à lógica. Porém, ele aceita a crítica dos filósofos de que uma lógica inteiramente pura só levaria a tautologias[30] e, para fazer aritmética, geometria ou qualquer ciência, é

---

[30] A tautologia é, na retórica, um termo ou texto que expressa a mesma ideia de formas diferentes. Como um vício de linguagem, pode ser considerada um sinônimo de pleonasmo ou redundância. Exemplos comuns na linguagem popular: 'sair para fora', 'subir para cima', 'tudo que é demais, sobra', entre outros. A origem do termo vem do grego *tautó*, que significa "o mesmo", mais *logos*, que significa "assunto". Portanto, tautologia é dizer sempre a mesma coisa em termos diferentes. Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tautologia. Na lógica matemática, trata-se de uma proposição que é sempre verdadeira, ou, em termos mais técnicos, uma *proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V (verdade)* (ALENCAR FILHO, 2002, p. 43).

preciso algo mais do que lógica pura. Esse algo mais pode ser chamado de intuição. Ele então recua ligeiramente em sua afirmação e reconhece que a matemática não se tornou totalmente livre da intuição, mas que essa intuição é do tipo 'aceitável', indubitável, a intuição dos números puros. Nesse ponto, é preciso explicar o que seria uma intuição 'aceitável', e Poincaré (1995) o faz por meio da classificação de três tipos de intuição, que são o apelo aos sentidos e à imaginação, a generalização por indução e a intuição do número puro. Como exemplos, ele cita:

> Se, numa reta, o ponto C está entre A e B, e o ponto D entre A e C, o ponto D estará entre A e B.
>
> O que é verdadeiro para uma quantidade real – dizia Poncelet – deve sê-lo para uma quantidade imaginária; o que é verdadeiro para a hipérbole, cujas assíntotas são reais, é, portanto, verdadeiro para a elipse, cujas assíntotas são imaginárias (p. 18).

Para Poincaré (1995), o primeiro exemplo é do primeiro tipo, isto é, um apelo aos sentidos e à imaginação. O segundo trata-se de um princípio de generalização, e que, embora não faça apelo ao testemunho dos sentidos, assim como o primeiro tipo de intuição, não pode nos dar certeza. Contudo, *quem duvidará seriamente da terceira, quem duvidará da aritmética?* (POINCARÉ, 1995, p. 19). Ou seja, ele defende a aritmética e a intuição do número puro como as únicas bases seguras para edificar a matemática e acredita que, por meio do que chamou de *aritmetização*, a análise evoluiu e se concretizou, atingindo um rigor absoluto.

> Hoje em dia, na análise, não restam mais que números inteiros, ou sistemas finitos ou infinitos de números inteiros, ligados entre si por uma rede de relações de igualdade ou desigualdade. A matemática, como se diz, aritmetizou-se (POINCARÉ, 1995, p. 17).
>
> Ora, na análise hoje, quando queremos nos dar ao trabalho de ser rigorosos, não há mais que silogismos ou apelos a essa intuição do número puro, a única que não pode nos enganar. Pode-se dizer hoje que o rigor absoluto foi atingido (idem, p. 19).

A confiança de Poincaré ao falar da análise real no início do século XX deve-se principalmente, mas não apenas, aos bem-sucedidos (ou bem-aceitos) trabalhos de George Cantor e Richard Dedekind na formalização do sistema numérico. A segurança em afirmar que o *rigor absoluto foi atingido* também refletia uma certa satisfação pela superação de dificuldades de tentativas anteriores, como aquela proposta por Cauchy, que definia um número irracional como o limite de uma sequência infinita de racionais. O grande problema dessa ideia é que o limite só existe se o número irracional existe, ou, em outras palavras, o limite converge para algo que ele quer definir.

Tecnicamente, pode-se dizer que se trata de uma circularidade lógica[31], ou, no popular, *cachorro correndo atrás do próprio rabo*.

O esforço para colocar o sistema numérico e a análise real em bases sólidas rendeu, em 1872, a publicação de três construções dos números reais de forma independente, por três métodos diferentes. Richard Dedekind por meio de cortes de racionais (ou cortes de Dedekind), Charles Méray (1835 – 1911) e George Cantor por meio de sequências fundamentais, e Karl Weierstrass e Eduard Haine (1821 – 1881) por meio de frações decimais. Esses trabalhos não se tratavam apenas de grandes contribuições à matemática ou de preenchimento de lacunas fundamentais do sistema numérico, como o que apresentamos até aqui pode sugerir. Eles mudavam também a forma de fazer matemática.

Na concepção vigente à época de Bolzano e Cauchy, número era uma entidade cuja existência era assumida a *priori*, e o papel de uma definição seria alcançar e descrever essa entidade. Nesses moldes, considerando a definição de números irracionais como limite de

[31] Para mais detalhes a respeito dessa circularidade, indicamos a leitura de Baldino (1994).

sequências de racionais, podemos pensar que *o número estava presente no lugar para onde a sequência convergia como que à espera de que a convergência se consumasse* (BALDINO, 1994, p. 6). Como vimos, essa definição foi considerada insatisfatória, e a solução encontrada para esse problema mudava não só o conceito de número, mas também o papel de uma definição. Segundo Baldino (1994), é importante reforçar que houve 'construção' dos números reais, e que, além disso, o papel da definição mudava de descritivo para constitutivo.

> Em vez de uma presença metafísica a priori que pedia uma determinação de seu lugar por um processo de aproximações sucessivas, foi o próprio processo de aproximação que se impôs como presença no lugar que ele mesmo indicava. Dissolveu-se a consistência ontológica do número como entidade metafísica (BALDINO, 1994, p. 7).

Uma outra questão envolvida na construção dos números reais, e que não passou despercebida, foi a utilização de processos infinitos. Leopold Kroenecker (1823 – 1891), que foi professor de George Cantor na Universidade de Berlim,

> Rejeitava categoricamente a construção dos números reais de seu tempo pelo fato de não poder ser efetuada só com processos finitos, e

> pedia uma revolução aritmética que banisse como inexistentes os números irracionais. [...] Diz-se que ele perguntou a Lindemann[32] para que servia sua prova de que π não é algébrico já que números irracionais não existem (BOYER, 1996, p. 416).

Mas, talvez Kroenecker seja mais conhecido pela frase *Deus criou os números naturais. Todo o resto é invenção do homem*, o que nos leva a repensar a formalização do sistema numérico também como o resultado de um desejo de que cada ponto em uma reta (e consequentemente cada segmento de reta) corresponda a um número (COURANT; ROBBINS, 2000). Isso porque, para finalidades práticas de medida e diversas outras aplicações, os racionais são mais do que suficientes. Na verdade, apenas as decimais exatas, aquelas obtidas de subdivisões da unidade em 10, 100, 1000 etc. já cobrem a reta densamente; isto é, dado um ponto qualquer da reta, é possível obter uma fração decimal tão próxima desse ponto quanto se queira.

Em síntese, a matemática do século XIX experimentou, movida por um sentimento de fragilidade dos fundamentos, uma espécie de retorno ao ideal grego de rigor e precisão inaugurado por Euclides no século III

[32] Carl-Louis Ferdinand von Lindemann (1852 – 1939) foi um matemático alemão que se notabilizou como o primeiro a mostrar que π é transcendente.

a.C. Nesse cenário a aritmética foi escolhida como uma base segura para a construção do edifício matemático e, após algumas tentativas de definição do número real, a solução encontrada e aceita pela comunidade científica foi a construção do número real. A revisão das bases da matemática também ajudou a criar um sentimento de que a matemática atingira o rigor absoluto, o ponto final do seu curso histórico, resultado de uma jornada que começou na Grécia Antiga. Essa teleologia[33], isto é, o sentimento que a matemática 'cumpriu sua missão' e 'foi o que tinha que ser', pode levar a uma leitura anacrônica da história, isto é, o passado é analisado com o olhar do presente, com o benefício de todo o conhecimento que não era disponível no passado. Segundo Roque (2012), os livros de história da matemática estão repletos de anacronismos. E, além disso, costumam ser anacronismos recorrentes, como aquele em que se sustenta que os gregos experimentaram uma crise em sua filosofia ao

[33] Segundo Abbagnano (2007), teleologia é a parte da filosofia natural que explica os fins das coisas, é o mesmo que finalismo, ou, em suas palavras, *doutrina que admite a causalidade do fim, no sentido de que o fim é a causa total da organização do mundo e a causa dos acontecimentos isolados. Essa doutrina implica duas teses: 1ª o mundo está organizado com vistas a um fim; 2ª a explicação de qualquer evento do mundo consiste em aduzir o fim para o qual esse evento se dirige* (p. 457).

descobrirem os números irracionais. Esse é um dos assuntos da próxima seção.

2 – O desenvolvimento da incomensurabilidade na Grécia Antiga e o olhar anacrônico sobre a história dos números irracionais

Pitágoras de Samos foi o fundador de uma confraria com um rígido código de conduta em que se estudavam propriedades acerca dos números, da música e da astronomia. A historiografia credita a Pitágoras e seus seguidores, conhecidos como pitagóricos, uma série de realizações no âmbito da matemática e áreas afins, como o desenvolvimento do teorema que levou seu nome, o desenvolvimento dos rudimentos de uma teoria dos números, a criação de uma escala musical, a construção de grandezas incomensuráveis, entre outras. Também se credita a Pitágoras e seus seguidores a introdução das palavras “filosofia” e “matemática”.

O período em que Pitágoras viveu não é conhecido com exatidão, mas conjectura-se que tenha sido de 586 a 500 a.C. Na verdade, tudo que se refere ao nome de Pitágoras reveste-se de incertezas, especulações e relatos que chegam à beira do anedotismo. Isso se deve principalmente ao fato de nenhum documento dos tempos de Pitágoras ter chegado aos dias de hoje. Na verdade, nem mesmo se sabe se Pitágoras deixou algo escrito, e grande parte do que sabemos a seu respeito vem de fontes muito posteriores ao tempo em que ele viveu. Os escritos mais antigos referentes a Pitágoras se devem a filósofos neopitagóricos do século I d.C., porém, um dos principais relatos das realizações da escola pitagórica está ainda mais distante do tempo em que ela existiu, foi escrito por Proclo no século V d.C., portanto, cerca de mil anos após a morte de Pitágoras. Proclo afirma ter lido uma obra de um discípulo de Aristóteles chamado Eudemo[34], que se tratava de uma espécie de compêndio de toda a geometria grega produzida desde o período de Tales e de Pitágoras (BOYER, 1996; CAJORI, 2007; EVES, 2004; GARBI, 2007).

A confraria criada por Pitágoras, também conhecida como escola pitagórica, acreditava que "tudo é número", no sentido de que tudo o que existe poderia ser traduzido

---

[34] Eudemo de Rodes (370 a 300 a.C.) é considerado o primeiro historiador da ciência e da matemática. A obra a qual Proclo se refere, e que supostamente esteve em suas mãos, encontra-se perdida e é conhecida como 'Sumário Eudemiano'. Porém, o fato de Proclo ter vivido cerca de 800 anos após Eudemo coloca essa tese sob suspeição. Além disso, estudos recentes apontam que Proclo fez uma interpolação de Eudemo com uma obra muito mais próxima do seu tempo chamada 'De vita pytaghorica', escrita por um filósofo neoplatônico assírio chamado Jâmblico (245 – 325 d.C.) (GONÇALVES; POSSANI, 2009).

em números, como a harmonia na música, as formas da geometria e até as gotas do mar, pois

> [...] ainda que seja muito difícil contá-las, as gotas de água do mar são passíveis de serem contadas. Para os pitagóricos, todas as coisas que compõem o cosmo gozam dessa propriedade, o que os levou a considerar que as coisas consistem de números (ROQUE, 2012, p. 104).

Pensar que tudo o que existe pode ser entendido por intermédio dos números é uma visão presente até nos dias de hoje, inclusive o argumento utilizado pelos pitagóricos, que pode ser colocado da seguinte forma: *se todas as coisas possuem forma, e formas podem ser descritas por números, então os números se tornam a essência do conhecimento, a porta para um nível superior de sabedoria* (GLEISER, 1997).

Os pitagóricos lidavam com o conhecimento matemático de uma forma bastante peculiar. Hoje, estabelecemos fronteiras bem nítidas que separaram a ciência do misticismo, mas os pitagóricos não faziam tal distinção. Ciência e misticismo eram como faces de uma mesma moeda, uma servindo de inspiração à outra[35]. Para

---

[35] Na verdade, misticismo e religião sempre estiveram relacionados ao avanço científico. Mesmo após o século XVII, quando as Academias decretaram que os dogmas da religião deveriam ficar de fora das comunicações científicas, alguns cientistas continuavam a

exemplificar o complexo amálgama de matemática, misticismo e cosmologia que constituía a escola pitagórica, vamos usar a música. Diversos relatos afirmam que a partir de uma série de experiências com os sons emitidos por cordas tensionadas, os pitagóricos teriam descoberto relações entre os comprimentos dessas cordas e as notas musicais emitidas por elas. Essas experiências permitiram que se criasse uma escala musical, além de instrumentos como a harpa. Essa seria a parte científica. A parte mística transcendia essas experiências e afirmava que cada planeta emitia um som ao realizar sua órbita, de acordo com a sua distância até o Sol. Dessa forma, a movimentação dos planetas produzia uma sinfonia celestial que só poderia ser ouvida por pessoas de espírito elevado. Possivelmente, acreditava-se que Pitágoras era uma dessas pessoas.

Entre as grandes realizações atribuídas aos pitagóricos, destaca-se a construção de segmentos incomensuráveis. Segundo Boyer (1996), as circunstâncias em que ocorreu a primeira percepção da incomensurabilidade são tão incertas quanto a época do seu desenvolvimento.

---

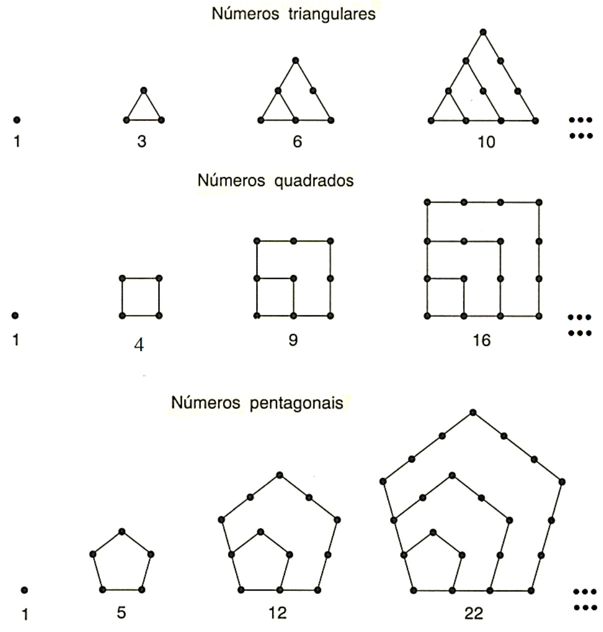
pautar suas pesquisas em algo que, de certa forma, assemelhava-se a um tipo de crença transcendental. Um dos casos mais emblemáticos é o de Einstein, cujo trabalho científico fora impulsionado em grande parte pela crença em "uma grande ordem do universo", imortalizada por uma de suas mais célebres frases, "Deus não joga dados".

Contudo, há vários relatos que sugerem que Pitágoras e seus seguidores teriam realizado uma demonstração a partir do lado e da diagonal de um quadrado. Porém, algumas fontes como Roque (2012) consideram que essa demonstração está além dos conhecimentos dos matemáticos do século VI a.C., e teria sido realizada muito tempo depois e creditada aos pitagóricos pela tradição. Para entender essas colocações, precisamos falar da 'aritmética dos pontinhos' praticada por Pitágoras e seus discípulos.

O lema da escola pitagórica, 'tudo é número', referia-se na verdade a números inteiros e suas frações. Porém, segundo Roque (2012), os pitagóricos não possuíam uma noção de número puro, ou seja, *os números pitagóricos não eram o objeto matemático que conhecemos hoje, isto é, entes abstratos* (p. 104). Em seus estudos e experiências matemáticas, Pitágoras e seus seguidores trabalhavam com seixos, pequenas pedras arredondadas, por isso a referência aos 'pontinhos'. Os chamados 'números figurados' da matemática pitagórica eram figuras formadas por pontos (

Figura 10).

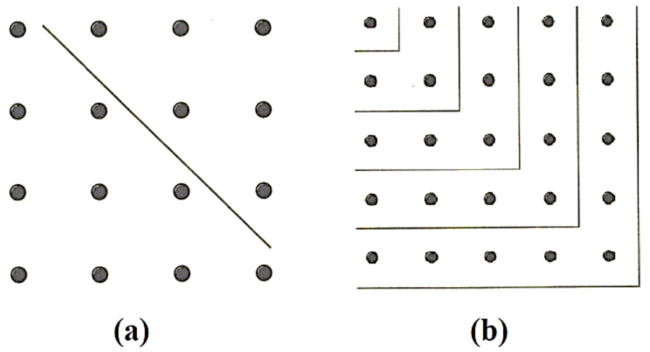
Figura 10 - Números figurados



Fonte: EVES (2004, p. 100)

Diversas construções provavelmente decorreram do arranjo ou da disposição visual dos números figurados, como 'todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos' (Figura 11) ou que 'as somas parciais da sequência de números ímpares 1+3+5+7+... são sempre um número quadrado' (Figura 11). Algumas obras como Boyer (1996) e Eves (2004) consideram essas observações como as primeiras manifestações de uma teoria dos números.

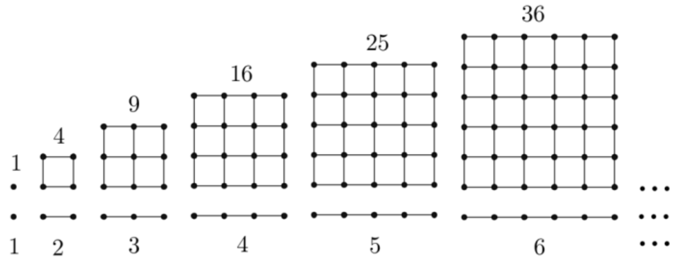
Figura 11 - Aritmética dos pontinhos



Fonte: ROQUE (2012, p. 107)

Outro desenvolvimento possível em um contexto da aritmética com pedrinhas, e que nos interessa em particular, tem relação específica com os números quadrados. É preciso lembrar que, para os pitagóricos, elevar um número ao quadrado significava construir um quadrado a partir de um segmento (formado por pontinhos). Por exemplo, elevar 3 ao quadrado implicava em construir um quadrado a partir de um segmento formado por 3 pontinhos, assim como elevar 4 ao quadrado significava construir um quadrado a partir de um segmento formado por 4 pontinhos. Assim, pode-se alcançar a compreensão de que 'o quadrado de um número par é sempre par, e o quadrado de um número ímpar é sempre ímpar' (ver Figura 12).

Figura 12 - Significado de elevar ao quadrado para os pitagóricos

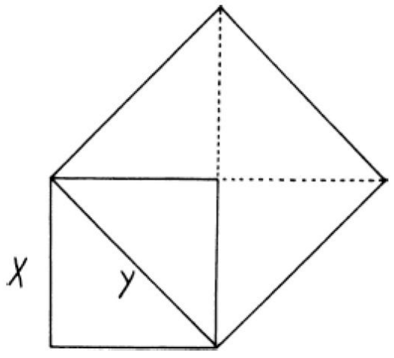


A partir dessas observações, podemos formular uma hipótese de como teria sido a construção da incomensurabilidade de uma maneira que seja próxima dos conhecimentos dos pitagóricos. Apesar de se tratar de um livro de ficção, Dewdney (2000) apresenta um enredo interessante – e que deixaremos aqui como uma possibilidade – de como Pitágoras e seus discípulos poderiam ter atacado a questão da incomensurabilidade. Segundo essa obra, Tales conhecia um teorema (aprendido com os egípcios) que afirma que, dado um quadrado de lado x e diagonal y, se construímos um segundo quadrado sobre a diagonal do primeiro, ele terá o dobro da área do primeiro, isto é, $y^2 = 2x^2$ (ver Figura 13). Se Tales conhecia esse teorema, é razoável aceitar que Pitágoras também conhecia[36] uma possibilidade para

[36] Especula-se que o jovem Pitágoras possa ter convivido com o então experiente Tales, e aprendido matemática com ele, visto que a diferença de idade entre os dois seja algo em torno de meio século.

a construção da incomensurabilidade, conforme descrita a seguir.

Figura 13 - Teorema egípcio



Fonte: DEWDNEY (2000, p. 42)

Os pitagóricos consideravam que tudo poderia ser representado por números (inteiros), portanto, não deveriam aceitar que fosse possível a existência de segmentos incomensuráveis. Por isso, partimos da hipótese de que os segmentos x e y são comensuráveis. Isso significa que eles têm uma unidade em comum, e que quando escritos nessa unidade, ambos são representados por números inteiros, que podemos considerar primos entre si. Daí, pode-se imaginar os segmentos x e y marcados com pontinhos representando

---

Mesmo que esse encontro não tenha ocorrido, os conhecimentos de Tales devem ter chegado até Pitágoras de outras formas.

seus respectivos comprimentos na unidade comum encontrada. Pelo teorema egípcio (Figura 13), o quadrado maior tem o dobro de pontinhos do quadrado menor, logo, é formado por um número par de pontinhos, o que implica que y é par, pelas observações que fizemos na Figura 12. Daí, temos que o número de pontinhos do quadrado com lado y é na verdade um múltiplo de 4, e como esse quadrado tem o dobro de pontinhos daquele de lado x, concluímos que x também é par. Isso contradiz a hipótese de que x e y são primos entre si (não têm múltiplos em comum), e essa contradição foi criada a partir da hipótese de que o lado e a diagonal do quadrado eram comensuráveis. Portanto, era preciso aceitar a existência de segmentos incomensuráveis (DEWDNEY, 2000).

Diversos relatos apresentam essa construção como uma experiência chocante, humilhante, devastadora, herética, assombrosa e perturbadora para os pitagóricos, porque comprometia a base do pensamento da escola pitagórica (AABOE, 1984; BELL, 1986; BENTLEY, 2009; BOYER, 1996; IFRAH, 2005; MUIR, 1996; SMITH, 1996; STRUIK, 1987). A construção de segmentos que não podem ser representados pela razão de números inteiros, os chamados segmentos incomensuráveis, teria causado consternação entre os pitagóricos, estremecendo as bases de suas crenças místico-religiosas nos números inteiros. Nas palavras de Carl Boyer,

> [...] a comunidade matemática grega fora assombrada por uma descoberta[37] que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos inteiros. Tratava-se da descoberta que na própria geometria os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo simples propriedades básicas (BOYER, 1996, p. 50).

Toda a filosofia criada por Pitágoras estaria arruinada com essa construção, pois derrubava a crença fundamental de que 'tudo é número', de que todas as formas do universo poderiam ser descritas por meio de números (inteiros). Um simples quadrado já mostrava a insuficiência dos números para cumprir tal tarefa e uma crise se estabeleceu, a chamada 'crise dos incomensuráveis' ou 'escândalo lógico' (ÁVILA, 1984; EVES, 2004; ROSSMEISSL; WEBBER, 1992). A crise teria sido tão séria que os pitagóricos decidiram *guardar segredo desta inexplicável falha na obra do arquiteto supremo, para não despertar sua cólera* (IFRAH, 2005, p. 329). Mas, apesar dos esforços para manter o assunto

---

[37] De acordo com nossa concepção de matemática como um conhecimento histórico-social, preferimos usar os termos 'desenvolvimento' ou 'construção' ao invés de 'descoberta', pois entendemos que esse termo sugere que algo que estava escondido foi encontrado pronto ou por acaso. Porém, nas citações diretas, o uso do termo obviamente será mantido.

em sigilo, conta uma lenda que um membro da congregação chamado Hipaso de Metaponto teria revelado o segredo para não membros da confraria, e, por conta disso, foi lançado ao mar (BENTLEY, 2009; BOYER, 1996; EVES, 2004; MUIR, 1996; ROSSMEISSL; WEBBER, 1992; SMITH, 1996).

Além das questões místico-filosóficas envolvidas, algumas obras acrescentam mais dois fatores que justificariam ter havido uma crise. A construção de grandezas incomensuráveis desafia o senso comum e a intuição geométrica.

> A descoberta dos incomensuráveis parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros. Além disso, parecia contrária ao senso comum, pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional (EVES, 2004, p. 106).

> [...] não é verdade que dois segmentos quaisquer sejam sempre comensuráveis. [...] esse é um fato que contraria nossa intuição geométrica, e por isso mesmo a descoberta de grandezas incomensuráveis na Antiguidade representou um momento de crise no desenvolvimento da matemática (ÁVILA, 1984, p. 1).

Esses três argumentos a favor da crise podem ser agrupados em um só, presumidamente mais forte do que cada um isoladamente: a construção de segmentos incomensuráveis teria abalado o pensamento pitagórico porque contrariava a base da fé nos números inteiros, o senso comum ou a intuição geométrica, ou os três ao mesmo tempo. Para o olhar de um matemático do século XX, parece um raciocínio consistente com a descrição dos pitagóricos e suas realizações matemáticas consagradas pela historiografia. Todavia, alguns historiadores têm colocado essas teses sob suspeição, e versões contestadoras da 'crise dos incomensuráveis' começam a criar consistência, fruto de pesquisas recentes em história da matemática.

A mesma documentação que sustentou a construção de uma visão favorável a uma crise de fundamentos da matemática ocorrida no século VI a.C. começou a ser revista a partir da década de 1960. A partir dessas releituras, começaram a surgir versões alternativas para os relatos tradicionais de uma 'crise dos incomensuráveis'. Uma das frentes de pesquisa contesta não só a crise, mas diversos outros dados referentes aos pitagóricos bastante consolidados pela historiografia, como a demonstração do teorema que levou o nome de Pitágoras e até mesmo a sua própria imagem como um matemático. O motivo desse descrédito reside principalmente na fragilidade da documentação tradicionalmente referida, por se tratar de relatos tardios e interpolações de diversos textos, como discutimos no início desta seção (GONÇALVES; POSSANI, 2009; ROQUE, 2012).

Duas outras frentes de pesquisa descartam um colapso de ordem filosófica no seio da escola pitagórica, mas por motivos diferentes. Uma delas sustenta que os pitagóricos provavelmente não descobriram os incomensuráveis porque sua matemática era muito rudimentar, o que impossibilitava lidar com questões avançadas como a incomensurabilidade. Para Roque (2012), a matemática pitagórica era muito concreta, não possuía uma noção de número puro, e por isso, estava muito distante do pensamento abstrato que comumente é associado à matemática grega, de forma que *a descoberta das grandezas incomensuráveis, frequentemente atribuída a um pitagórico, deve ter tido outras origens* (p. 100). As provas que apresentamos (Figura 3 e Figura 13) para a incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado seriam, nessa perspectiva, construções posteriores que foram atribuídas aos pitagóricos.

Uma terceira vertente, bastante sutil em relação às anteriores, defende que, mesmo aceitando que Pitágoras e seus discípulos tenham de alguma forma apreendido a incomensurabilidade, essa construção não teve a relevância que tradicionalmente lhe é atribuída, portanto, não houve crise (ARAÚJO, 2011; GONÇALVES; POSSANI, 2009; ROQUE, 2012). Para os pitagóricos, números e grandezas eram coisas distintas, e a necessidade de comparar grandezas por meio de números não fazia parte do seu pensamento. A ideia de que *'tudo é número' não significava 'todas as grandezas são comensuráveis'* (ROQUE, 2012, p. 124), ou seja, a existência de segmentos incomensuráveis era uma situação particular da geometria, sem relação com os números, tratados pela aritmética.

O desenvolvimento dos incomensuráveis também teve consequências importantes para a matemática, como o desenvolvimento da teoria das proporções de Eudoxo (que posteriormente inspirou o trabalho de Dedekind no século XIX), como o caráter formal e abstrato de geometria de Euclides. A partir da construção de segmentos incomensuráveis, que desafiavam o testemunho dos sentidos, uma nova forma de fazer geometria se tornava necessária, em que todas as afirmações tinham que ser comprovadas a partir da lógica e de um conjunto de axiomas e premissas (ROQUE, 2012). Nessa 'nova realidade' as figuras poderiam ser retiradas sem que isso afetasse as demonstrações, já que todas as conclusões deveriam decorrer exclusivamente da argumentação lógica, dos axiomas e dos teoremas ou postulados. A geometria começou a se tornar, a partir dos Elementos de Euclides, o que o professor Florêncio Ferreira Guimarães Filho[38] ensinava em suas aulas: *a geometria é uma conversa ao telefone*. Há que se dizer que o telefone ao qual ele se referia não possibilitava ver as pessoas do outro lado da linha, como hoje é possível com os *smartphones*. Ou seja, o que o professor Florêncio queria dizer é que a geometria deve se sustentar apenas com base em argumentações, como uma 'conversa ao telefone', não sendo permitido, na demonstração de algum teorema, tirar conclusões exclusivamente a partir de figuras.

Os comentários de Pappus a respeito do livro X dos Elementos de Euclides, aquele que trata de grandezas comensuráveis e incomensuráveis, refletem a separação entre geometria e aritmética de forma bastante clara: *incomensurabilidade e irracionalidade pertencem essencialmente à esfera da geometria* (THOMSON; JUNGE, 1930, p. 52, tradução nossa). Além disso, a concepção de número e de quantidades contínuas de

---

[38] Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo. Foi professor de um dos autores deste livro durante a graduação e a pós-graduação.

Pappus, segundo Thomson e Junge (1930), era coincidente com a concepção aristotélica: *números são limitados pelo um como seu mínimo, mas não têm um limite máximo; quantidades contínuas têm um máximo, mas não têm um limite mínimo*[39] (THOMSON; JUNGE, 1930, p. 52, tradução nossa) . Em outras palavras, os números são racionais e comensuráveis, pois avançam a partir de uma unidade que pode ser adicionada até o infinito; números possuem uma unidade comum por natureza. Já as quantidades contínuas, partem de um todo e não possuem uma unidade comum por natureza, mas apenas por convenção; podem ser divididas infinitamente (THOMSON; JUNGE, 1930).

Mesmo sem poder afirmar que foram os pitagóricos os primeiros a desenvolver os incomensuráveis, ainda assim resta uma questão intrigante: como os gregos lidaram com a incomensurabilidade? Como eles conviveram com essa 'nova' realidade? Para um matemático do século XIX, envolvido com o estabelecimento de bases rigorosas de fundamentação para a matemática, e mesmo para os matemáticos do século XX ou XXI, parece impossível aceitar que os gregos possam ter convivido

[39] Numbers are limited by one as their minimum, but have no maximum limit; continuous quantities have a maximum, but no minimum limit.

com um sistema numérico cheio de lacunas provocadas pela construção de números irracionais. Porém, essas lacunas só existem a partir de uma série de pressupostos, como a relação biunívoca de números com os pontos de uma reta – que implica que todo segmento deve ter sua medida representada por um número – e que todo número (ou grandeza) deve ser racional ou irracional. Trata-se de pressupostos fortemente arraigados em nós, pois são introduzidos desde muito cedo no currículo escolar, e utilizados com tanta frequência que acabam sendo naturalizados, isto é, torna-se difícil raciocinar 'fora da caixa'. Uma demonstração da força dessa naturalização é que o leitor provavelmente não deve ter percebido que utilizamos esses dois pressupostos nas demonstrações aritmética (Figura **3**) e geométrica (Figura **13**) do desenvolvimento da incomensurabilidade.

Na perspectiva de separação entre geometria e aritmética já discutida, descarta-se o pressuposto da associação biunívoca número-grandeza (ou número-segmento ou número-pontos de uma reta). As definições encontradas no início do Livro X dos Elementos de Euclides parecem reforçar essa ideia, pois tratam da incomensurabilidade de um ponto de vista geométrico:

> Definições:
>
> 1. Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se.
>
> 2. Retas são comensuráveis em potência, quando os quadrados sobre elas sejam medidos pela mesma área, e incomensuráveis, quando para os quadrados sobre elas nenhuma área comum seja possível produzir-se.
>
> 3. Sendo supostas essas coisas, é provado que existem realmente retas, ilimitadas em quantidade, tanto comensuráveis quanto também incomensuráveis com a reta proposta, umas somente em comprimento, outras também em potência. Seja chamada, de fato, por um lado, a reta proposta racional, e as comensuráveis com essa, quer em comprimento e em potência quer em potência somente, racionais, e, por outro lado, as incomensuráveis com essa sejam chamadas irracionais (EUCLIDES, 2009).

Porém, segundo Fowler (1999), as palavras em grego utilizadas por Euclides foram *rhetos* e *alogoi*. Apesar de não formarem um par dicotômico, foram traduzidas como ‘racional’ e ‘irracional’, o que pode causar confusões e mal-entendidos.

> O uso das palavras ‘racional’ e ‘irracional’ dá a impressão que as definições se referem a uma dicotomia em que cada linha é ou racional ou irracional; mas este não é o caso no que se refere ao original em grego. De fato, Euclides não fez esforço algum nas classificações do Livro X para

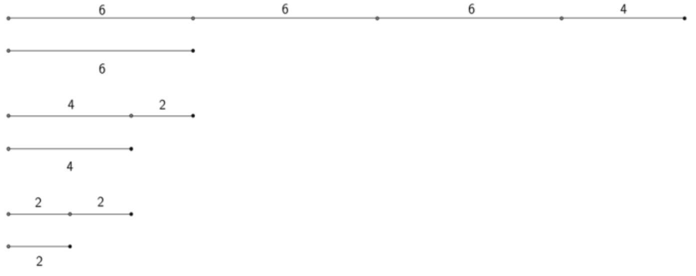
> considerar cada possibilidade de linha. Ele primeiro descreveu as linhas exprimíveis na Definição 3, e então ele passou a descrever treze tipos diferentes de linhas *alogoi* que surgem de construções muito especiais (FOWLER, 1999, p. 162, tradução nossa).

Para evitar problemas, Fowler (1999) opta por traduzir *rhetos* por ‘exprimível’ e deixa *alogoi* sem tradução, mas, escreve em outro momento que *alogos* forma um par dicotômico com *logos,* e que pode significar ‘sem palavras’ ou ‘sem razão’. Outras obras apresentam os termos ‘indizível’, ‘privado de razão’ (MENDES, 2012, p. 46), ‘inexprimível’ (DANTZIG, 1970, p. 97), ‘não-racionais’ e até mesmo ‘não deve ser falado’ (MLODINOW, 2010, p. 37). Contudo, alguns desses significados utilizam a palavra ‘razão’, e também é necessário entender o que os gregos entendiam por ‘razão’ (*logos*).

Os gregos poderiam trabalhar com dois segmentos (ou retas como escrevia Euclides) e determinar se são comensuráveis ou incomensuráveis por meio de um processo conhecido como antifairese, sem a necessidade de associar números aos segmentos. Esse processo também era utilizado quando se tratava apenas de números, o que conhecemos hoje por algoritmo de Euclides. Assim, a razão 22:6 era assim enxergada pelos gregos como a sequência ‘3 – 1 – 2’, pelo seguinte: 6 pode ser subtraído **3 vezes** de 22, e sobra 4; 4 pode ser subtraído **uma vez** de 6, e sobra 2; 2 pode ser subtraído **2 vezes** de 4 e não sobra nada (FOWLER, 1979; ROQUE, 2012).

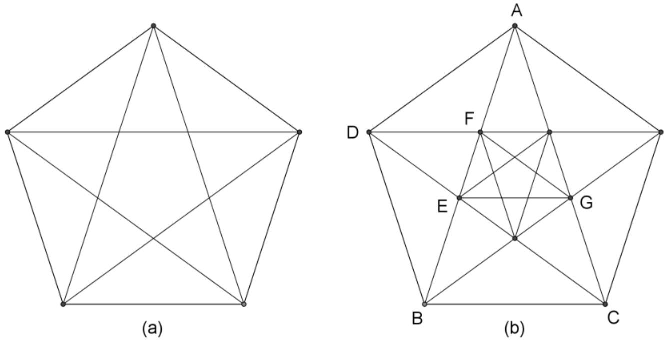
Em se tratando de segmentos, procede-se da mesma forma. Por exemplo, dados os segmentos de comprimento 22 e 6 (associamos números para facilitar a visualização, mas, originalmente não se procedia dessa forma), marcamos o segmento menor 3 vezes sobre o segmento maior, observando um resto (de comprimento 4). Marcamos esse resto uma vez sobre o segmento menor, observando um resto (de comprimento 2). Marcamos o segundo resto sobre o primeiro resto duas vezes, não observando sobra alguma (Figura 14).

Figura 14 - Processo de antifairese



A partir do entendimento de razão segundo os gregos, e do seu tratamento via processo de antifairese, são feitas novas sugestões de como a incomensurabilidade teria surgido. Algumas obras mostram como esse processo pode levar à conclusão de que diagonal e lado de um quadrado são segmentos incomensuráveis (FOWLER, 1979; MIGUEL, 2009; ROQUE, 2012). Utilizamos esse procedimento na atividade de Medição de Segmentos (ver Atividade 5 - Medida de segmentos). Mostramos aqui uma outra possibilidade, apresentada por Fowler (1979), que envolve o lado e a diagonal de um pentágono regular, figura de onde nasce o pentagrama, comumente atribuído como o símbolo da escola pitagórica (Figura 15a).

Figura 15 - Construção da incomensurabilidade a partir da antifairese no pentágono



O procedimento é o seguinte (várias afirmações não serão justificadas formalmente, pois tornaria o processo muito penoso, mas, podem ser facilmente aceitas utilizando-se um compasso para comparar os segmentos):

i) Subtrair AD de AB (lado e diagonal do pentágono maior)

$AB = AE + EB = AD + EB \Rightarrow AB - AD = EB.$

Note-se que $EB = AF$ que é menor do que AD. Daí, AD cabe **1 vez** em AB e sobra EB.

ii) Subtrair EB de AD

$AD = AE = AF + FE = EB + FE \Rightarrow AD - EB = FE.$

Note-se que FE é menor do que EB. Daí, EB cabe **1 vez** em AD e sobra FE.

iii) Subtrair FE de EB

Observe que $EB = AF = FG$ que é uma diagonal do pentágono menor. Como FE é um lado do pentágono menor, retornamos à mesma situação do item ‘i’ e o processo continua indefinidamente com pentágonos cada vez menores (a sequência gerada é ‘1 – 1 – 1 – 1 ...’). Ao mesmo tempo em que se descobriam os incomensuráveis, criava-se um critério para detectar a incomensurabilidade de dois segmentos. Os incomensuráveis seriam aqueles em que o processo de antifairese envolvido não termina.

Talvez seja possível reinterpretar o significado dos *alogoi* a partir daí. Indizível e inexprimível podem ter alguma relação com um processo infinito de comparação.

Segundo Fowler (1979), utilizando como critério de incomensurabilidade o fato de que o processo de antifairese não termina, podemos dizer que o lado e a diagonal do pentágono regular são segmentos incomensuráveis. De fato, se o lado e a diagonal de um pentágono são comensuráveis, a sua razão pode ser expressa por uma razão de inteiros. Mas, como esse processo não termina, isso implica que podemos obter inteiros cada vez menores. Por redução ao absurdo, concluímos que o lado e diagonal de um pentágono são segmentos incomensuráveis.

Ao proceder à comparação de segmentos por antifairese, dispensava-se a necessidade da ideia de que cada segmento deve corresponder a um número. Como vimos, geometria e aritmética eram tratadas de formas diferentes, e, ao que tudo indica, nenhum tipo de problema era causado por essa separação. No século XIX, porém, isso passou a ser considerado insatisfatório, e mais, também foi encarado como uma falha nos pilares da matemática. Decidiu-se então que, entre outras coisas, todo segmento de reta deveria corresponder a um número, ou seja, decidiu-se que a geometria deveria ser traduzida em termos aritméticos. O preço que foi pago para incluir os segmentos incomensuráveis com a unidade entre os segmentos que podem ser traduzidos por um número foi a ampliação do próprio conceito de número. Os irracionais alcançavam assim, após alguns séculos de obscurantismo, o seu *status* de número.

Por fim, pode-se dizer que há diversos indícios de que a crise dos incomensuráveis é resultado de uma visão anacrônica da história, e foi atribuída aos pitagóricos muito tempo depois, como resultado de um forte movimento de retorno aos fundamentos da matemática ocorrido no século XIX. Na visão de um matemático pós-Cantor/Dedekind do final do século XIX e início do século XX, quando os primeiros livros de história da matemática foram escritos (embebidos em positivismo), se hoje achamos que a existência de incomensuráveis ainda contraria o senso comum das pessoas, com maior razão isso deve ter acontecido no passado. E esse fato, associado à crença de que 'tudo é número', deve ter causado um grande terremoto na escola pitagórica, abalando severamente os pilares de sua filosofia.

Esse pensamento, porém, está eivado de anacronismos, além de teleologias. Ao considerar que algo que contraria a nossa intuição também contrariou a intuição dos pitagóricos, estamos considerando que existe uma ‘intuição humana’, uma linha de pensamento única que evoluiu e que se tornou o nosso pensamento atual. Porém, conforme argumentamos, a partir da separação entre aritmética e geometria, e do processo de antifairese, os gregos antigos do tempo de Pitágoras podem ter convivido sem problema algum com os incomensuráveis. A visão da crise tem implícito algo que sugere uma escalada do desenvolvimento matemático contaminado por uma visão do século XX, depois que se integralizou aritmética e geometria.

3 – Números irracionais notáveis: π, e

Consideramos esses números notáveis por três motivos principais: aparecem com frequência em livros didáticos e paradidáticos, documentários e até em obras de ficção; são exemplos de números irracionais transcendentes em um universo de exemplos que parece privilegiar os números irracionais algébricos; possuem uma longa e rica história que atravessa diversos períodos da história da matemática. Além disso, eles têm fundamental importância no meio científico, aparecendo em diversos contextos e fórmulas matemáticas, como na função de densidade de probabilidade $f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, utilizada na estatística; na Transformada de Fourier $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{2\pi ikx} dk$, $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ikx} dx$, utilizada na física, sismologia, criptografia, no processamento digital de sinais e imagens, entre outras; na Fórmula Integral de Cauchy $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$, utilizada em análise complexa; nas raízes enésimas da unidade $z^n = 1 \rightarrow z = e^{2\pi i/n}$, utilizadas na engenharia elétrica; entre outras fórmulas e outras áreas.

Nesta seção, vamos investir esforços na abordagem de aspectos históricos a respeito dos problemas que deram origem a esses números, dos avanços, dos entraves e das mudanças de paradigma na constituição deles, pois entendemos que esses aspectos podem contribuir para a ampliação da visão não apenas a respeito dos números e, π e ϕ, mas dos números irracionais como um todo. Na formação do professor de matemática, pensamos que a história é essencial para promover o rompimento do ciclo vicioso descrito na apresentação deste livro. Com uma visão ampliada a respeito dos números irracionais, o professor adquire maior segurança para levar o tema à sala de aula de forma independente ou complementar ao livro didático, e proporcionar uma aprendizagem relacional do assunto para os alunos, assim como para si próprio.

3.1 – π

O uso da letra grega π para representar a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo se tornou comum apenas no século XVIII, a partir de publicações do matemático suíço Leonhard Eüler (1707 – 1783). Porém, situações e problemas que remetem direta ou indiretamente ao conceito carregado por essa letra são muito mais remotos.

Os registros mais antigos que tratam do número π, tal qual o conhecemos hoje, devem-se a Arquimedes de Siracusa (287 a 212 a.C.). Em uma pequena obra intitulada *A Medida de um Círculo*, o matemático grego demonstra que a área de um círculo de raio r e comprimento C é igual à área de um triângulo retângulo de base C e altura r. Chamando a área do círculo de A, isso é equivalente a dizer que $A = \frac{1}{2}rC$. Como já se sabia que o comprimento de uma circunferência é proporcional ao seu diâmetro, isto é, $C = kD$, onde k é uma constante de proporcionalidade e $D = 2r$ é o diâmetro, pode-se dizer, em notação moderna, que Arquimedes chegou até a fórmula $A = kr^2$. Na sequência, nessa mesma obra, Arquimedes apresenta um método para aproximação da constante k, que é equivalente ao que conhecemos hoje como π. É o que mostraremos a seguir.

Com o cálculo do perímetro do hexágono inscrito e uma simples observação, que o comprimento da circunferência é maior do que o perímetro do hexágono inscrito (ver Figura 16), Arquimedes mostra que k deve ser maior do que 3.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro da circunferência}} > \frac{\text{perímetro do hexágono inscrito}}{\text{diâmetro da circunferência}} = \frac{6r}{2r} = 3\ .$$

O passo seguinte consiste em dobrar sucessivamente os lados dos polígonos inscritos, sempre calculando os perímetros, até chegar a um polígono de 96 lados. A ideia central subjacente ao procedimento realizado por Arquimedes é que, ao aumentar o número de lados do polígono inscrito, tornando-o 'mais próximo' do círculo, é possível diminuir a diferença entre as áreas do círculo e do polígono o tanto quanto se queira, conforme ilustra a Figura 16.

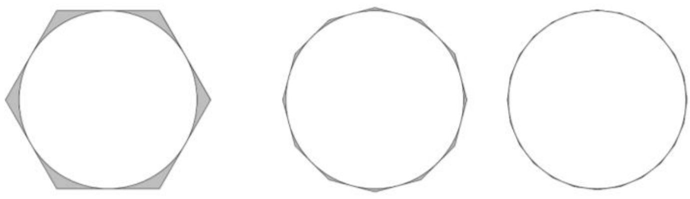
Figura 16 - Polígonos inscritos de Arquimedes

Mais uma consideração é importante para o procedimento realizado, a área de um círculo sempre será maior do que a área de qualquer polígono inscrito nesse círculo. A desigualdade obtida por Arquimedes ao final desse processo foi

$$k = \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro da circunferência}} > \frac{\text{perímetro do 96-ágono inscrito}}{\text{diâmetro da circunferência}} = \frac{223}{71}.$$

Em seguida, Arquimedes fez o mesmo procedimento para polígonos circunscritos, utilizando ideia análoga, isto é, de que a área de um círculo sempre será menor do que a área de qualquer polígono circunscrito a esse círculo, mas, é possível diminuir a diferença entre essas áreas tanto quanto se queira, aumentando-se o número de lados dos polígonos circunscritos, conforme ilustra a Figura 17.

Figura 17 - Polígonos circunscritos de Arquimedes



A desigualdade obtida por Arquimedes ao final desse processo foi

$$k = \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro da circunferência}} < \frac{\text{perímetro do 96-ágono circunscrito}}{\text{diâmetro da circunferência}} = \frac{22}{7}.$$

Combinando as duas desigualdades, concluiu que

$$\frac{223}{71} < k < \frac{22}{7}.$$

Em representação decimal, o resultado obtido por Arquimedes seria equivalente a aproximadamente $3{,}1408 < k < 3{,}1429$, que é um resultado correto até a segunda casa decimal. Para maiores detalhes de como Arquimedes fez seus cálculos, principalmente no que diz respeito aos cálculos dos perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos, veja Garbi (2007). Também recomendamos o vídeo “Finding pi by Archimedes method” (FINDING..., 2012), que mostra como é possível transformar as ideias de Arquimedes apresentadas acima em uma atividade para a sala de aula, com o apoio do *software Geogebra* para a visualização geométrica e de uma planilha eletrônica para a aplicação de fórmulas iterativas e a realização dos cálculos.

Civilizações mais antigas como a egípcia, chinesa e mesopotâmica também resolveram, cada qual à sua maneira, problemas relacionados com π, como o cálculo da área de um círculo. Porém, diferentemente da obra de Arquimedes, nesses registros não há menção a uma constante proveniente da razão entre o comprimento e o diâmetro (ou raio) da circunferência. Apenas calcula-se a área de um círculo específico por meio de um determinado procedimento que deve ser seguido. Registros dessa natureza aparecem em papiros egípcios, em tabletes de argila babilônicos e até em textos sagrados, conforme mostraremos a seguir.

O papiro Rhind é um documento egípcio que data aproximadamente do século 18 a.C. Ele é composto por 85 problemas de aritmética e geometria com suas respectivas soluções. Não se sabe ao certo qual é a natureza do papiro Rhind, isto é, para que ele foi escrito. As duas principais hipóteses levantadas são um manual para o professor ensinar ao aluno ou um caderno de estudante, devido à repetição de exercícios e aos pequenos erros contidos em alguns problemas (MARTINS, 2015). Em diversos problemas, a seguinte regra era utilizada para calcular a área de um círculo: o diâmetro é multiplicado por $1/9$, depois o resultado é subtraído do próprio diâmetro que, por fim, é elevado ao quadrado (ROQUE, 2012). Por exemplo, no problema 50, a área de um círculo de 9 unidades de diâmetro é calculada assim:

$$\frac{1}{9} \cdot 9 = 1$$

$$9 - 1 = 8$$

$$8^2 = 64$$

Em linguagem moderna, podemos dizer que a área de um círculo era dada no papiro Rhind por $\left(\frac{8}{9}D\right)^2$. Como indicativo do nível de acuidade desse cálculo, podemos descobrir qual valor de π está implícito nessa relação comparando com a fórmula atual $\frac{\pi D^2}{4}$. Igualando as fórmulas, teremos $\frac{\pi\cdot}{4} = \frac{8^2}{9^2}$, o que acarreta $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}16049$. Trata-se de uma boa aproximação, mas, não há indícios que comprovem que os egípcios tinham consciência de que havia uma constante matemática envolvida no cálculo da área de círculos. Tão interessante quanto saber a forma utilizada para o cálculo da área do círculo é pensar como os sábios egípcios chegaram até ela, e, para tal, indicamos a leitura de Beckmann (1974).

Sobre a Mesopotâmia, centenas de tabletes de argila de conteúdo matemático chegaram até nós e encontram-se espalhados em museus e coleções particulares ao redor do mundo. Selecionamos um tablete que é representativo da matemática babilônica, principalmente no que diz respeito às medidas. Trata-se do tablete Haddad 104, datado do século 18 a.C., encontrado na região do rio Dyiala, na cidade de Tell Haddad, na Síria. O tablete é composto por dez problemas relativos à construção de silos para estocar grãos, medidas de embarcações, carga de trabalho e produção de tijolos (GONÇALVES, 2013). Em um desses problemas, a área do círculo aparece no contexto do cálculo da capacidade para estocar grãos de um silo em formato de tronco de cone. Segundo Roque (2012), o procedimento ensinado, no que diz respeito ao cálculo da área da base do silo, que é um círculo, ocorre da seguinte forma: triplicar o diâmetro, elevar o resultado ao quadrado e depois dividir por 12. Em linguagem moderna, isso equivale a fazer $\frac{(3D)^2}{12}$, ou, $\frac{3D^2}{4}$, que se comparado com a fórmula atual, $\frac{\pi D^2}{4}$, implicaria em $\pi = 3$.

A partir de interpretações de dados contidos em outros tabletes, como os tabletes de Susa, fontes como Eves (2004) e Boyer (1996) afirmam que os povos da Mesopotâmia utilizavam a aproximação $\pi \sim 3\frac{1}{8}$, um valor próximo ao que era usado pelos egípcios. Essas comparações não fazem sentido porque, como vimos, a matemática dos egípcios e babilônios não era baseada em fórmulas, mas em sequências de comandos. Outra evidência de que π não era conhecido da mesma forma como o conhecemos hoje são os diversos valores que podem ser inferidos para π dos cálculos contidos em diferentes tabletes. Nas palavras de Tatiana Roque,

> Seria um tremendo anacronismo dizer que os povos mesopotâmicos e egípcios já possuíam uma estimativa para π, pois esses valores estavam implícitos em operações que funcionavam, ao invés de serem expressos por números considerados constantes universais, como em nossa concepção atual sobre π. O valor de $1/9$ dos egípcios era uma constante multiplicativa que devia ser operada com o diâmetro, e não um número. O caso babilônico é ainda mais flagrante, pois o verbo “triplique” indica uma operação (ROQUE, 2012, p. 85).

Em textos sagrados como a Bíblia e o Talmude[40], existem cálculos diretamente relacionados a π. Na Bíblia, está escrito que *ele também fez o tanque de metal redondo de dez côvados de diâmetro, cinco côvados de altura e trinta de circunferência* (Reis 7:23), enquanto no Talmude, está escrito que *cada círculo cuja circunferência é três palmos, tem um palmo de largura* (TSABAN, 1998, p. 76). Em ambos os trechos, é evidente que o comprimento da circunferência está sendo considerado como o triplo do diâmetro, mas será que isso significa que os sábios judeus conheciam π e consideravam seu valor igual a 3?

Estamos novamente diante da mesma questão colocada em relação aos egípcios e babilônios, porém, nesse caso, as condições são diferentes, pois existem mais fontes que permitem formar uma resposta mais consistente. Segundo Tsaban (1998), ao ser questionado a respeito da imprecisão do cálculo estabelecido no Talmude, o rabino Yohanan (180 – 279 d.C.) disse que isso veio da Bíblia, e

[40] O Talmude é um livro sagrado dos judeus, um registro de conhecimentos e discussões rabínicas acumulados ao longo de milhares de anos que versam a respeito da lei, ética, costumes e história do judaísmo. É formado por duas partes, Mishna e Gemara. Os conhecimentos do Mishna foram transmitidos de forma oral de geração em geração, até serem compilados no século II d.C. O Gemara consiste de discussões e argumentações a respeito dos conhecimentos contidos no Mishna, realizadas por duas escolas, a babilônica e a palestina, cada qual tendo compilado seu próprio Talmude (TSABAN, 1998).

que deveria ser usado apenas para propósitos religiosos. Para Tsaban (1998), o fato do rabino **não** ter respondido "este é um fato matemático" nem "você pode checar fazendo a medição" (p. 77), indica que era sabido que não se tratava de um valor matematicamente correto, e, conforme o próprio rabino dissera, deveria ser utilizado apenas para fins religiosos. Um comentário do rabino Maimonides (1135 – 1204 d.C.) mostra, de forma ainda mais clara, que os sábios judeus conheciam muito mais a respeito de π. Eles estavam conscientes de que existia uma razão entre a circunferência e seu diâmetro, conheciam inclusive uma melhor aproximação, o valor $3\frac{1}{7}$, além de questões relacionadas à irracionalidade desse número, mas, contentaram-se com o valor 3 para suas obrigações religiosas. Maimonides escreveu assim:

> Você precisa saber que a razão do diâmetro para sua circunferência não é conhecida e nunca será possível expressá-la precisamente. Isto não é devido à uma falha no nosso conhecimento, como a facção chamada Gahaliya [os ignorantes] pensa; é na sua natureza que isso é desconhecido e não há forma de sabê-lo, mas apenas aproximadamente. Os geômetras já escreveram ensaios a respeito disso, isto é, saber a razão do diâmetro para a circunferência aproximadamente, e a demonstração para isso. Essa aproximação que é aceita pelas pessoas cultas é a razão de um para três e um sétimo. Todo círculo cujo diâmetro é

> um palmo, tem uma circunferência de três palmos e um sétimo aproximadamente. Como nunca será percebido, mas apenas aproximadamente, eles [os sábios hebreus] pegaram o inteiro mais próximo e disseram que todo círculo cuja circunferência é três punhos tem um punho de largura, e eles se contentaram com isso para suas necessidades religiosas (TSABAN, 1998, p. 78, tradução nossa).

Deixando o Egito e a Mesopotâmia para trás, partimos agora em direção aos primeiros séculos da Era Cristã. Lá encontraremos grandes sábios como Claudio Ptolomeu (90 – 168 d. C.), que obteve um valor ainda melhor para π do que fora obtido por Arquimedes. Em sua obra mais difundida, o *Almagesto*, Ptolomeu calculou o comprimento de uma corda de $0{,}5^o$, equivalente ao lado de um polígono de 720 lados inscritos na circunferência (Arquimedes chegou até um polígono de 96 lados), que lhe permitiu obter uma aproximação para π de $\frac{377}{120}$, ou, $3{,}14161616\ldots$ (EVES, 2004).

Daí em diante, durante muitos séculos, o que se viu foi um desfile de aproximações cada vez mais precisas para π, todas valendo-se do método utilizado por Arquimedes, também chamado de método dos perímetros, ou método clássico. Foi assim que, em 480 d.C., o mecânico chinês Tsu Ch’ung-chih obteve a aproximação $\frac{355}{113}$, correta até a

6ª casa decimal. Também foi assim, usando o método clássico, que o matemático árabe Al-Kashi obteve em 1429 uma aproximação correta até a 16ª casa decimal. Em 1610, o holandês Ludolph van Ceulen calculou π corretamente até a 35ª casa decimal pelo método clássico, utilizando para isso um polígono de 2^{62} lados[41]. Em 1621, o físico holandês Willebrord Snell descobriu um método para aperfeiçoar o método clássico, e conseguiu atingir as mesmas 35 casas decimais encontradas por van Ceulen utilizando um polígono de "apenas" 2^{30} lados. Em 1630, com o método de Snell, o astrônomo austríaco Christoph Grienberger foi capaz de calcular π até a 39ª casa decimal, e foi a *última tentativa importante de calcular π pelo método dos perímetros* (EVES, 2004, p. 143).

A partir do século XVII, com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, surgem métodos mais eficientes e menos dispendiosos para obter aproximações para π. Em 1671, o matemático escocês James Gregory obteve a série infinita

[41] Ceulen gastou grande parte de sua vida nessa tarefa e seu feito foi considerado tão extraordinário que sua viúva fez gravar o número em seu túmulo (hoje perdido) no adro da igreja de São Pedro em Leyden. Até hoje o número π é chamado "número ludolphiano" (EVES, 2004, p. 143).

$$arc\ tgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots - 1 \leq x \leq 1.$$

Contudo, de acordo com Eves (2004), passou despercebido para ele que, para $x = 1$, a série forneceria uma potente forma de cálculo para π,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

O matemático inglês Abraham Sharp percebeu o que Gregory não havia alcançado e, em 1699, escreveu π corretamente até a 71ª casa decimal, a partir da série desenvolvida pelo matemático escocês, fazendo $x = \sqrt{1/3}$. Com esse mesmo valor de x, o matemático francês De Lagny obteve em 1719 as 112 primeiras casas decimais de π (EVES, 2004).

Após Arquimedes ter aproximado π com precisão de duas casas decimais, tudo o que os matemáticos haviam conseguido, apesar de usarem métodos mais poderosos que os do célebre matemático grego, resumia-se a obter maior precisão. Tratava-se de um aumento vigoroso, mais de cem casas decimais, porém, que não eram capazes de desnudar a natureza desse número. Mesmo as 112 casas obtidas por De Lagny não eram capazes de garantir, por exemplo, que π era um número irracional. A demonstração da irracionalidade de π só veio em 1767, com o matemático suíço Johann Heinrich Lambert[42]. Antes dessa data, uma das razões para se obter π com um grande número de casas decimais era, além do desafio, *verificar se os dígitos começariam a se repetir, e, se fosse o caso, obtê-lo como um número racional exato, talvez com um denominador grande* (EVES, 2004, p. 148). Mas, mesmo após Lambert ter resolvido o problema que desafiou inúmeros matemáticos por quase dois mil anos, continuaram a aparecer aproximações mais precisas para π. Utilizando a série de Gregory, Zacharias Dase encontrou 200 casas decimais em 1844, Rutheford obteve 400 em 1853, e William Shanks obteve espantosas 707 casas em 1873 (EVES, 2004).

O interesse naquele momento havia se tornado outro, o deslumbre das possibilidades de significados para π fora do âmbito da geometria, até então seu *habitat* natural. Os estudos de séries infinitas, como a de James Gregory, revelavam outros aspectos de π, fazendo surgir diversas relações aritméticas com aparentemente pouca ou nenhuma relação com a geometria. Ou seja, os matemáticos estavam descobrindo que π era muito mais

---

[42] No Apêndice B, apresentamos uma prova da irracionalidade de π. Não é a prova originalmente apresentada por Lambert, e, embora seja necessário um conhecimento básico de cálculo diferencial e integral, consideramos essa prova mais acessível que a do matemático francês. Para os argumentos de Lambert, ver Laczkovich (1997).

do que a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência. Segundo Kasner e Newman (1968), *é por mera coincidência, por mero acidente que π é definido como a relação entre um círculo e seu diâmetro* (p. 84).

Com o advento dos computadores, o desafio ou a compulsão pela obtenção das casas decimais de π alcançaria novos patamares, ultrapassando a barreira dos milhares. Em 1949, o ENIAC, primeiro computador digital totalmente eletrônico, obteve 2037 casas decimais. Utilizando um computador Cray-2, o matemático da NASA, D. H. Bailey, calculou 29.360.000 casas em 1986. Pouco depois disso, o matemático japonês Yasumasa Kanada, da universidade de Tóquio, utilizando um supercomputador NEC SX-2, calculou π com 137.217.700 dígitos (EVES, 2004). Na era digital, a obtenção das casas decimais de π se tornou uma espécie de teste de capacidade de processamento para novos computadores.

Apesar de todo o conhecimento acumulado a respeito de π, ainda existem questões em aberto relativas a esse número. Em Teoria dos Números, diz-se que um número é *normal* se todos os seus dígitos aparecem de forma completamente aleatória, isto é, a probabilidade de aparecerem é a mesma. Não se sabe ainda se π é um número normal.

---

3. 2 – *e*

O número $2{,}7182818284590\ldots$ ficou conhecido como número de Eüler devido ao pioneirismo do trabalho do matemático suíço Leonhard Eüler (1707 – 1783). Ele foi o primeiro a usar, em 1727, a letra *e* para representar esse número, o primeiro a escrevê-lo como soma de uma série infinita, além de também ter sido o primeiro a demonstrar que se tratava de um número irracional. Apesar do trabalho de Eüler ser reconhecidamente um marco na história do número *e*, ele não foi o primeiro a notar que havia algo de extraordinário relacionado a esse número.

No início do século XVII, o matemático, físico e astrônomo escocês John Napier (1550 – 1617) chegou muito próximo de descobrir *e*. Ele publicou, em 1614, um tratado chamado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos), obra pioneira que apresentou os logaritmos ao mundo. A invenção de Napier foi muito bem recebida no meio científico, pois facilitava os cálculos com números muito grandes, e rapidamente difundiu-se por toda a Europa, chegando inclusive na China. Um dos primeiros a utilizar a invenção de Napier foi o astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571 – 1630), em seus elaborados cálculos das órbitas planetárias (MAOR, 2008).

Para elucidar a ideia por trás do trabalho de Napier, isto é, para dar um exemplo do que tratam os logaritmos, suponha que precisamos multiplicar 32 por 128. Para isso, criamos uma tabela com as potências de 2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Localizamos nessa tabela as potências referentes a 32 e 128, que são 5 e 7, respectivamente. Somamos $5 + 7 = 12$ e procuramos na tabela o número referente a 12 que é 4096. Ou seja, $32 \times 128 = 4096$. Para números muito grandes ou muito “quebrados”, trabalhar com a soma dos expoentes ao invés do produto dos números representou um grande avanço para uma época em que os maiores recursos disponíveis para realização de cálculos eram pena, tinta e papel. Essa é a essência da ideia dos logaritmos. Na linguagem matemática atual, os expoentes 5 e 7 seriam denotados por $\log_2 32$ e $\log_2 128$, e 12 seria o resultado da operação $\log_2(32 \times 128) = \log_2 32 + \log_2 128$. Em geral, vale a propriedade $\log_b(A \times B) = \log_b A + \log_b B$. De forma análoga, também é possível fazer divisões pela propriedade $\log_b(A\,/B) = \log_b A - \log_b B$. Ou seja, por meio dos logaritmos, qualquer problema de multiplicação ou divisão reduz-se a um problema de soma ou subtração.

Porém, há um grande problema com a tabela criada. O seu uso é muito restrito, pois muitos cálculos não podem ser realizados com ela. Por exemplo, se quisermos multiplicar 28×112, não encontraremos esses números na tabela, pelo simples fato de que não são potências de 2. Como preencher os enormes vazios existentes na referida tabela? Napier entendeu que a solução seria adotar uma base próxima de 1. Vamos analisar o que aconteceria se adotássemos, por exemplo, a base 1,01.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
1,01	1,01	1,020	1,030	1,040	1,051	1,061	1,072	1,082

O crescimento agora é muito mais lento e os vazios entre as potências são muito menores. E seriam menores ainda se a base fosse ainda mais próxima de 1. Na verdade, Napier também estava ciente disso, pois não adotou $1{,}01$, este foi apenas o nosso exemplo. Ele adotou como base $1 - 10^{-7}$, ou, $0{,}9999999$. A escolha de um número menor do que 1 deveu-se ao desejo de Napier de começar com um número muito grande, 10^7, e, por meio de multiplicações por potências da base escolhida, obter uma série decrescente de resultados. No entanto, a essência da ideia que apresentamos não muda. Napier dedicou 20 anos de sua vida à realização dos cálculos que deram origem a várias tabelas que constavam de sua obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio.*

Uma das formas de se entender por que pode-se dizer que Napier chegou muito perto de descobrir *e* é por meio do problema do juro composto contínuo. Antes disso, porém, é necessário abordar brevemente um problema mais simples, mais próximo do que ocorre em situações reais. Problemas de matemática financeira são bastante antigos, com registros em tabletes de argila mesopotâmicos datados de aproximadamente 1700 a.C. Em um desses tabletes está escrito: *quanto tempo levará para uma soma em dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de juros de 20% compostos anualmente?* (MAOR, 2008, p. 41).

De forma geral, problemas como esse podem ser resolvidos pela conhecida fórmula $M = P(1+i)^t$, onde M é o montante, P é o principal, i é a taxa de juros compostos (em decimal) e t é o tempo total de aplicação. O problema mesopotâmico traduzir-se-ia então por $P(1+0{,}2)^t = 2P$, ou seja, $1{,}2^t = 2$. Aprendemos no ensino médio que esse tipo de equação, chamada de equação exponencial, resolve-se por meio da aplicação do logaritmo para "retirar" a incógnita do expoente, usando uma extensão da propriedade que já discutimos acima para os números reais, $\log_b A^n = n \log_b A$. A solução para o problema babilônico ficaria assim em linguagem matemática moderna:

$$\log_2 1{,}2^t = \log_2 2$$

$$\mathrm{t} \cdot \log_2 1{,}2 = 1$$

$$t = \frac{1}{\log_2 1{,}2} \sim 3{,}8018$$

Os mesopotâmicos, segundo Maor (2008), mesmo sem conhecer os logaritmos, obtiveram uma boa aproximação para a resposta, que é um número irracional, alcançando o valor 3,7870.

Tendo visto esse problema, podemos falar agora do problema do juro contínuo. Suponha que você coloque

R\$1,00 em um banco que paga juros simples de 4% ao ano. Ao final de 25 anos terá R\$2,00. Se os juros forem compostos, o dinheiro crescerá mais rápido e ao final do mesmo período, teria $(1+0{,}04)^{25} = 2{,}66$ reais. Se agora, ao invés de capitalizado anualmente, o dinheiro fosse capitalizado semestralmente, teríamos $(1+0{,}04/2)^{50} = 2{,}69$. Isso pode levar a concluir que quanto mais frequente o período de capitalização, mesmo sem alterar a taxa de juros, maior será o montante ao final de 25 anos. Observe que, procedendo assim, a taxa i de juros não fica expressa no mesmo período que o tempo t de aplicação, e precisamos adaptar a fórmula vista anteriormente para $M = P(1+i/n)^{nt}$. Assim sendo, em 25 anos, um real crescerá $(1+4/100n)^{25n} = (1+1/25n)^{25n}$, onde n é o número de vezes que os juros são pagos (GARDNER, 1991). Observe que a última expressão é equivalente a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$. Na tabela a seguir, mostramos o que acontece à medida que n cresce. O valor do montante parece estabilizar-se em $2{,}7183$, menos de três centavos a mais do que se tivesse sido composto semestralmente.

Tabela 1 - O problema do juro composto contínuo

Taxa (%)	Capitalização	*n*	Montante (R$)
4	Anual	25	2,6658
2	Semestral	50	2,6916
1/3	Mensal	300	2,7138
1/90	Diária	9.000	2,7181
1/2160	Horária	216.000	2,7183
1/129600	Por minuto	12.960.000	2,7183
1/7776000	Por segundo	777.600.000	2,7183

Fonte: Elaborada pelos autores.

Segundo Maor (2008), no final do século XVII, o matemático suíço Jakob Bernoulli (1655 – 1705) trabalhava com a questão do juro composto contínuo, e foi o primeiro a mostrar uma conexão entre a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, que aparece nesse problema, e o número e. Bernoulli mostrou que o limite dessa expressão deve se encontrar entre 2 e 3. Hoje, sabemos que $e = 2{,}7182818284590\ldots$ e que $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$(Para ver uma demonstração, ver Apêndice D). Voltando ao trabalho de Napier, ao recuperamos a essência de sua ideia, tomar um número muito próximo de 1 para que as potências crescessem lentamente e não deixassem grandes vazios umas entre as outras, temos algo bastante semelhante na expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, já que $1+\frac{1}{n}$ é cada vez mais próximo de 1 à medida que n vai para o infinito. De fato, ao elevar a base escolhida por Napier, $1-10^{-7}$, a um número muito grande como 10^7, obtemos 0,3678, que é aproximadamente $1/e$. Napier havia esbarrado em e, mas, ao que tudo indica, não se deu conta disso.

No ensino médio, o número e costuma ser apresentado simplesmente como a base de um logaritmo especial, chamado logaritmo natural, ou, logaritmo neperiano (em homenagem a Napier ou Neper, que também é uma grafia para o seu nome encontrada na literatura). No cálculo diferencial e integral, o tratamento dado a esse número, como valor de a para o qual a derivada da função $f(x)=a^x$ é igual à própria função, pode esconder a sua verdadeira natureza e fazer crer que se trata apenas de uma conveniência matemática para simplificação dos cálculos[43]. Essa impressão mostra-se completamente equivocada já que o número e aparece em diversos fenômenos naturais em que a taxa de variação das grandezas envolvidas é proporcional às próprias grandezas. Exemplos: a taxa de decaimento de uma substância radioativa é proporcional à quantidade de radiação; a taxa de resfriamento de um objeto quente é

[43] Também é possível encontrar e como a abcissa do ponto do gráfico $y=a^x$ no qual a reta tangente tem inclinação igual a 1. Também nesse caso, a essência do número de Eüler, um ingrediente fundamental em diversos problemas que envolvem o crescimento de diversas grandezas, parece se esconder na sofisticada construção geométrica apresentada.

proporcional à temperatura do objeto; a taxa de diminuição da intensidade do som no ar é proporcional à intensidade do som; a taxa de crescimento populacional é proporcional à população, entre outros. *Todos esses fenômenos que são, ou parecem ser, processos orgânicos, podem ser precisamente descritos por uma forma de função exponencial das quais a mais simples é* $y = e^x$ (KASNER; NEWMAN, 1968, p. 93).

Além das aplicações à física e à própria matemática, existem algumas aparições curiosas do número *e*. Uma dessas situações acontece no *problema do moleiro* (POMMER, 2010), que diz assim:

> Um moleiro armazenou 100 sacas de trigo, de 100 kg cada. O moleiro pretende transportar tal carga do armazém de sua casa até o moinho, que fica a 100 km de distância. Para tal, faz uso de um burro, teimoso por natureza, que não suporta mais de 100 kg. Porém, o burro, quando carregado, exige consumir 1 kg de trigo para cada quilômetro que percorre. Caso exista solução, proponha um modo de maximizar a quantidade de trigo que o moleiro pode fazer chegar até o moinho (VIEIRA, 2008 apud POMMER, 2010, p. 12)[44].

A princípio, parece um problema sem solução, já que, para transportar cada saca de $100kg$ por um trajeto de

[44] VIEIRA, A. **À procura do número e**. Portugal, Instituto Tecnológico e Nuclear, 2008.

$100km$, o burro consumiria toda a carga. É possível, porém, fazer algum trigo chegar ao seu destino, introduzindo postos de parada durante o caminho. Introduzindo apenas um posto no meio do caminho, o burro deixará todas as sacas pela metade ao final do primeiro trecho, que o moleiro pode juntar e formar 50 sacas de $100kg$. Ao final da segunda parte, essas 50 sacas também estarão pela metade. Ou seja, chegam ao seu destino 25 sacas de $100kg$, que corresponde a $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1/4$ da quantidade inicial. Introduzindo três paradas, o burro terá quatro trechos para percorrer. No final do primeiro trecho, consumirá $1/4$ de cada saca, ou seja, de cada 4 sacas o moleiro poderá fazer 3, ficando com $\frac{3}{4} \cdot 100 = 75$ sacas. Ao final do segundo trecho, o burro terá consumido $1/4$ do que havia antes, ou seja, restará $\frac{3}{4} \cdot 75 = \frac{225}{4}$ sacas. Ao final do terceiro trecho, com o consumo de mais $1/4$, restarão $\frac{3}{4} \cdot \frac{225}{4} = \frac{375}{8}$ sacas. E, finalmente, ao final do último trecho, o moleiro terá $\frac{3}{4} \cdot \frac{375}{8} = \frac{1125}{32}$ sacas. Observe que $\frac{1125}{32} = 100\left(\frac{3}{4}\right)^4$.

A questão que se coloca nesse ponto é: quantos postos deverão ser colocados para maximizar a quantidade de trigo que chega até o moinho? Alguns valores podem ser experimentados, formando uma tabela (Tabela 2). Uma análise superficial desses dados pode sugerir que quanto maior o número de postos de paradas, maior quantidade de trigo chega ao moinho. Na verdade, a quantidade máxima entregue vai se estabilizar em torno de 3678 kg, pois $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ converge para $1/e$, o mesmo número que apareceu inadvertidamente no trabalho de Napier.

Tabela 2 - Problema do moleiro

Trechos	**Paradas**	$[\mathbf{1-1/n}]^{\mathbf{n}}$	**% entregue**
2	1	$(1/2)^2$	25
4	3	$(3/4)^4$	31,64
8	7	$(7/8)^8$	34,36
16	15	$(15/16)^{16}$	35,61
32	31	$(31/32)^{32}$	36,21
64	63	$(63/64)^{64}$	36,50
128	127	$(127/128)^{128}$	36,64
256	255	$(255/256)^{256}$	36,72
512	511	$(511/512)^{512}$	36,75

Fonte: Elaborada pelos autores.

Uma situação semelhante ao problema do moleiro ocorre em um jogo conhecido como *cut and multiply* (corte e multiplique). Consiste em tomar um número, digamos 100, dividi-lo em partes iguais, e em seguida multiplicá-las. Ganha o jogo quem conseguir o maior resultado para a multiplicação. A solução parece se encontrar entre 30 e 40 e, de fato, se for estabelecido como regra que o número de partes deve ser inteiro, ganhará o jogo quem obtiver um valor de parcela mais próximo do número *e*, que equivale a dividir 100 em 37 parcelas de 2,702702... Uma curiosidade acerca do número e, relacionada com a brincadeira *cut and multiply* é que o maior valor de $\sqrt[n]{\boldsymbol{n}}$ ocorre quando $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}$.

Outra seara em que o número de Eüler também costuma fazer suas inesperadas aparições é na probabilidade. Vejamos, por exemplo, o problema do amigo oculto. Qual é a probabilidade que, em um grupo de n pessoas que vão participar de um amigo oculto (ou amigo X), ninguém sorteie a si próprio? Apesar da simplicidade do problema, é possível chegar a uma conclusão espantosa: a probabilidade é de exatamente $1/e = 0{,}367879441$ ..., ou, aproximadamente 37% para $n \geq 5$. Isto é, não importa se o grupo é formado por 5 ou por 5.000 pessoas, a probabilidade de que alguém sorteie a si próprio é praticamente a mesma (CARNEIRO, 1995).

Para terminar, temos de novo Eüler, que em 1748 mostrou o que muitos consideram a fórmula mais bela da matemática[45], pois relaciona cinco números importantes da matemática, $0, 1, e, \pi$ e i, dentre eles os dois números transcendentes mais famosos, e e π:

---

[45] Segundo Stewart (2009), de vez em quando surgem pesquisas para eleger a mais bela fórmula da matemática de todos os tempos, e a vencedora é quase sempre a fórmula de Eüler $e^{i\pi} + 1 = 0$.

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Para entender o significado dessa fórmula, é preciso ter uma preparação equivalente aos dois primeiros anos de um curso de matemática. Remetemos o leitor interessado em uma explicação dessa fórmula para Stewart (2009).

3.3 – π e e

Segundo Kasner e Newman (1968),

> Um universo em que faltassem e e π não seria inconcebível, como disse alguma alma antropomórfica. Dificilmente se pode imaginar que o sol deixasse de nascer ou as marés de fluir, se faltassem e e π. Mas sem estes dois artefatos matemáticos, o que sabemos do sol e das marés, na verdade toda nossa capacidade de descrever todos os fenômenos naturais, físicos, biológicos, químicos ou estatísticos, seria reduzido a dimensões primitivas (p. 93).

Esse pensamento nos remete a uma questão intrigante que talvez possa ter passado despercebida nas seções anteriores, e que será tratada nesta seção. O aparecimento de π e e em diversas fórmulas que descrevem fenômenos naturais e na fórmula de Eüler – que vimos na seção anterior e que relaciona os dois números – leva-nos a pensar na possibilidade de existir mais alguma relação entre esses dois números irracionais. No que diz respeito à origem, π e e têm histórias bem diferentes. O primeiro surgiu desde épocas muito remotas em problemas relacionados ao cálculo da área de um círculo, enquanto o segundo surgiu no século XVII, praticamente junto com o cálculo diferencial e integral, no contexto de diversos problemas relacionados a logaritmos e taxas de crescimento. Entretanto, apesar desse descompasso inicial, a partir de um certo ponto as histórias desses números começaram a se entrelaçar.

Durante muitos séculos, um dos maiores desafios relacionados aos números π e e era decidir a respeito de sua racionalidade ou irracionalidade. Conforme mostramos nas seções anteriores, esses desafios foram superados no século XVIII, e, segundo já se suspeitava, ambos os números foram confirmados como irracionais. Porém, no século seguinte, mais precisamente em 1884, a construção de um novo tipo de número lançaria novos desafios em relação a π e e. Para entender que desafios foram esses, precisamos primeiro entender a natureza desses novos números.

A maioria dos números que conhecemos na álgebra elementar são soluções para equações polinomiais com coeficientes inteiros. Por exemplo, os números $-1, \frac{2}{3}$ e $\sqrt{2}$ são soluções para as equações $x + 1 = 0$,

$3x - 2 = 0$ e $x^2 - 2 = 0$, respectivamente. Porém, números que não são estudados na álgebra elementar, como os números complexos, também podem ter essa propriedade, como é o caso de $i = \sqrt{-1}$, que é uma solução para $x^2 + 1 = 0$. Até números de aparência complicada podem ter essa propriedade. Por exemplo, $\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$ é solução da equação $x^6 - 2x^3 - 1 = 0$. Os números que são soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros são chamados de algébricos (MAOR, 2008).

Uma consequência imediata dessa definição é que todo número racional é algébrico. De fato, qualquer número que possa ser escrito da forma a/b com a e b inteiros será solução da equação com coeficientes inteiros $bx - a = 0$. A grande questão que se coloca agora é: será que existem números que não são algébricos? Por volta do início do século XIX, os matemáticos suspeitavam que sim, mas nenhum número ainda tinha sido encontrado. Pelo que vimos, se existir algum número não algébrico, ele não poderá ser racional. Logo, a procura por números não algébricos pode se restringir aos números irracionais (MAOR, 2008).

Foi o matemático francês Joseph Liouville (1809 – 1882) que acabou com o mistério. Em 1844 ele mostrou que o número $\frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \frac{1}{10^{4!}} + \cdots$ não é algébrico. Outro exemplo é $0{,}12345678910111213\ldots$, onde os dígitos são os números naturais em ordem (MAOR, 2008). Os números que não são algébricos, isto é, que não são solução de nenhuma equação com coeficientes inteiros, são chamados de transcendentes. Apesar de ter resolvido a questão, de certo modo, o número de Liouville não deixou os matemáticos completamente satisfeitos, afinal, ele foi construído com o propósito de se mostrar que existe um número que não é algébrico. Havia algo de artificial nesse número, e as atenções se voltaram novamente para π e e. Seriam esses números transcendentes?

Heinrich Lambert, que provou em 1768 que π é irracional, suspeitava que π e e eram transcendentes, mas não pode provar isso. A questão da transcendência de e ainda desafiaria os matemáticos por mais de um século, e só foi resolvida em 1873 pelo matemático francês Charles Hermite (1822 – 1901). Era de se esperar que, após resolver a questão para e, o matemático francês se dedicasse a decidir a situação de π, mas, segundo Maor (2008), Hermite escreveu: *Eu não me arriscarei a provar a transcendência de π. Se outros tentarem, ninguém ficará mais feliz do que eu com o seu sucesso. Mas,* *acredite-me, vai custar a eles algum esforço* (p. 248). Tudo leva a crer que Hermite imaginou que a demonstração da transcendência de π demandaria um grande esforço. Contudo, apesar da genialidade de Hermite, um curto espaço de tempo foi necessário para mostrar que ele estava enganado.

Apenas nove anos após o trabalho de Hermite, o matemático alemão Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852 – 1939) provou que π é um número transcendente. Na verdade, Hermite havia chegado muito perto de resolver a questão, pois Lindemann modelou sua prova de acordo com a demonstração de Hermite. O matemático alemão mostrou que uma expressão da forma

$$A_1e^{a_1} + A_2e^{a_2} + \cdots + A_ne^{a_n}$$

onde $a_i, 1 \leq i \leq n$, representam números algébricos distintos (reais ou complexos) e $A_i, 1 \leq i \leq n$, são números algébricos, nunca pode ser igual a zero. Como a expressão $e^{i\pi} + 1 = 0$ já era conhecida, colocando-a na forma da expressão acima como $e^{i\pi} + e^0 = 0$, decorre que πi é algébrico. A conclusão final necessitava de mais duas informações que também já eram conhecidas, i é algébrico e o produto de números algébricos é algébrico. Portanto, π é transcendente.

Com isso, resolvia-se também um dos problemas mais famosos já formulados até então, o problema da quadratura do círculo, proposto por geômetras gregos e que resistia às tentativas de resolução desde o século V a.C. Trata-se, em breves palavras, de se construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado. Ao medir a área do quadrado, temos a área do círculo, por isso a expressão "quadrar". A demonstração de Lindemann pusera fim em toda e qualquer esperança de se resolver esse problema, pois uma das consequências da transcendência de π é a impossibilidade de se resolver a quadratura do círculo[46].

[46] Apesar disso, são frequentes os relatos de pessoas que teriam conseguido resolver o problema da quadratura do círculo. Trata-se dos *quadradores de círculos* (BECKMANN, 1974, p. 174), figuras presentes em praticamente todos os países. Quase sempre, a suposta resolução da quadratura do círculo vem acompanhada de um "novo" valor para π. Um dos episódios mais famosos a esse respeito ocorreu no estado americano de Indiana em 1897. O médico Edwin Goodman enviou à legislatura estadual uma proposta de alteração do valor de π para $16/\sqrt{3}$. A proposta chegou até o Senado, que decidiu que não se tratava de uma questão sobre a qual se pudesse legislar (BECKMANN, 1974; STEWART, 2009). Outros casos bem semelhantes podem ser facilmente encontrados. Em uma busca na Internet, chegamos até Dutch (2010), que narra um caso ocorrido no estado americano de Iowa, também no século XIX, onde também foi levada às autoridades legislativas uma proposta de imposição legal para o valor de π. Nesse caso, o autor da proposta sugeria que fosse legalmente declarado que $\pi = 3$ devido à passagem bíblica de Reis 7:23. Segundo Stewart (2009), existem narrativas semelhantes a essa que supostamente ocorreram nos estados de Indiana, Iowa ou Idaho. Porém, essas narrativas não passam de *mitos persistentes*

Em linguagem matemática, o problema da quadratura do círculo pode ser assim colocado, $\ell^2 = \pi r^2$, onde r é o raio do círculo conhecido e ℓ é o lado do quadrado procurado. Isolando a incógnita ℓ, teremos $\ell = r\sqrt{\pi}$. Ora, se r é um dado do problema e o valor de π já era conhecido com mais de 700 casas de precisão, como se pode afirmar que se trata de um problema impossível? Qual a importância da demonstração de Lindemann nessa afirmação? Para responder a essas perguntas, precisamos aprofundar um pouco mais a discussão a respeito da quadratura do círculo, mas, antes, trazemos Kasner e Newman (1968) para dizer que *"impossível" em Matemática, significa teoricamente impossível, e não tem nada a ver com o estado atual do conhecimento humano* (p. 74, aspas no original). Ou seja, é claro que se pode construir um quadrado com uma área tão próxima à área do círculo quanto a aproximação conhecida de π permitir. Mas, a partir da demonstração de Lindemann, o problema tornou-se teoricamente impossível de resolver. Com régua e compasso, só podemos construir figuras a partir de pontos obtidos da interseção de duas retas, dois círculos ou de um círculo e uma reta. Traduzindo algebricamente, as retas serão equações lineares e os

---

(STEWART, 2009, p. 32). O caso de Goodman, no entanto, é confirmado como real por Beckmann (1974) e por Stewart (2009).

círculos serão equações do segundo grau, e a construção como um todo será uma combinação de equações algébricas, portanto, também será algébrica. Como π foi declarado transcendente, isso implica que esse número não é raiz de nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros, isto é, não pode ser obtido utilizando-se apenas régua e compasso.

No ano de 1900, David Hilbert (1862 – 1943), um dos maiores matemáticos daquele tempo, propôs no Segundo Congresso Internacional de Matemática, realizado em Paris, uma lista com vinte e três problemas ainda não resolvidos que ele considerava importantes para o desenvolvimento da matemática. O sétimo problema dessa lista consistia em estabelecer a transcendência (ou não) de certos números como, por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$. Especificamente em relação a esse número, que foi citado pelo próprio Hilbert, o problema foi resolvido em 1929 pelo matemático russo Alexandr Gelfond (1906 – 1968). Ele mostrou que $2^{\sqrt{2}}$ é um número transcendente. Em 1934, o próprio Gelfond e, de forma independente, Theodor Schneider (1911 – 1988), resolveram um problema mais geral referente ao desafio proposto por Hilbert, conhecido como teorema de Gelfond-Schneider:

Sejam α e β números algébricos (reais ou complexos). Se $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ e β não for um número racional (real), então α^{β} é transcendente (FIGUEIREDO, 2011, p. 55).

O teorema de Gelfond-Schneider permitiu acrescentar muitos números à lista de números transcendentes, inclusive e^{π}. Para entender como esse número pode ser considerado transcendente a partir desse teorema, encaminhamos o leitor para o Apêndice C. Embora o teorema de Gelfond-Schneider tenha proporcionado um significativo avanço, diversos números ainda permanecem desafiando os matemáticos, assim como Hilbert anunciou há mais de cem anos. Por exemplo, ainda não foi decidida a transcendência dos números π^{e}, π^{π} e e^{e} (MAOR, 2008).

Por fim, é possível enumerar algumas coincidências relativas a π e e, como por exemplo, o fatos dos dois números terem valores bem próximos, $3{,}1416\ldots$ e $2{,}7183\ldots$, assim como e^{π} e π^{e}, que valem $23{,}1407\ldots$ e $22{,}4591\ldots$, respectivamente. Além disso, a própria fórmula de Eüler $e^{i\pi}+1=0$ pode inspirar os matemáticos a pensar que não se tratam apenas de coincidências, e a buscar outras relações entre esses números. Alguns autores como Maor (2008) sugerem que esses fatos podem não ser mero fruto do acaso.

> Entre a infinidade de números reais, aqueles que são mais importantes para a matemática – $0, 1, \sqrt{2}, e$ e π – estão localizados dentro de menos de quatro unidades na linha numérica. Uma coincidência extraordinária? Um mero detalhe do grande projeto do Criador? (MAOR, 2008, p. 251).

Concordamos que o assunto é vibrante e tem um grande potencial para encantar quem quer que se interesse por entendê-lo mais profundamente. Todavia, a ideia exposta em Maor (2008) vai de encontro à visão que defendemos, da matemática como uma construção social, histórica, datada, atravessada e conduzida por disputas políticas, e pelos interesses mais diversos, e que carrega em si uma marca indelével do ser humano. Apesar disso, esse pensamento não diminui o seu encanto, muito ao contrário, torna-o ainda mais fascinante. Como explicar que uma construção social tenha a capacidade de descrever tão precisamente os fenômenos naturais? Ou, segundo Einstein citado por Livio (2010), *como é possível que a matemática, um produto do pensamento humano que é independente da experiência, se encaixe tão excepcionalmente aos objetos da realidade física?* (p. 14).

Parte III – Atividades

As atividades que apresentamos a seguir são sugestões para o professor, que deverá avaliar previamente quantas aulas serão necessárias para suas aplicações. O ideal é que todas as atividades sejam aplicadas, pois elas se complementam. Porém, também é possível aplicá-las de forma independente, de acordo com as particularidades da turma e o planejamento do professor. Ao final das oito atividades, ou da quantidade que o professor julgar apropriada, também recomendamos a aplicação da atividade extra, descrita, que propõe uma reflexão sobre todo o trabalho realizado. É importante destacar que ao final de cada atividade é de suma importância que o professor discuta, junto com sua turma, os resultados alcançados pelos alunos.

Atividade 1 - Diagnóstico

Justificativa

Números irracionais é um assunto que, em geral, é introduzido ao final do ensino fundamental. Isso significa que, quando chega ao ensino superior, o estudante já tem algum conceito ou ideia formada em relação ao tema. Ainda que essas ideias ou conceitos estejam truncados, isto é, não estejam em consonância com a teoria matemática, é de fundamental importância diagnosticar essas ideias no início de qualquer trabalho. A literatura aponta para a necessidade de se conhecer as imagens conceituais trazidas pelos alunos para que se possa trabalhar a partir delas, rearranjando ideias, reconstruindo ou até desconstruindo ideias que não contribuem para a aprendizagem de números irracionais (BROETTO, 2016; SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1999).

Descrição

Nesse contexto é que propomos, na forma de questionários, o cumprimento de um diagnóstico. Trata-se, é claro, de um diagnóstico inicial, que precisa e deve ser aprofundado depois. Em nossa experiência, porém, vimos que esses questionários já são capazes de mostrar algumas ideias ou concepções equivocadas dos estudantes (BROETTO, 2016). Entretanto, não é suficiente que esse questionário seja apenas aplicado. Melhores resultados decorrem quando o professor dá um retorno para a turma, discutindo e trabalhando as respostas dos alunos (corretas e erradas).

Como muito do que se ensina e do que se aprende de números irracionais na educação básica está relacionado com os números racionais (irracional é o número real que não é racional), é importante começar, na verdade, diagnosticando o que os alunos trazem de bagagem no que se refere aos números racionais. Ambos os questionários trazem situações relativas ao reconhecimento dos números, definição, representação (decimal e na reta ordenada), densidade e utilidade. Ao final de cada questionário, fazemos os alunos refletirem sobre os seus próprios conhecimentos.

Usamos uma variedade de representações dos números racionais e irracionais nos dois questionários. As principais foram frações de inteiros, frações com raízes quadradas ou π no numerador, dízimas periódicas, dízimas não-periódicas, dentre outras. Incluímos frações de inteiros nos dois questionários, a partir de uma constatação em Broetto (2016) de que alunos convertem as frações para representação decimal, algumas vezes na calculadora[47], para encontrar o período e, a partir daí, decidem se é racional ou irracional. As frações $\frac{-3}{14}$, $\frac{13}{23}$ e $\frac{22}{7}$ foram escolhidas para os questionários por apresentarem dízimas periódicas grandes: $-0{,}21\overline{428571}$, $0,\overline{5652173913043478260869}$ e $3,\overline{142857}$,

[47] Os modelos mais populares de calculadoras possuem 10 dígitos, podendo chegar a 12 dígitos. Algumas calculadoras científicas, computadores ou *smartphones* possuem *softwares* ou aplicativos que realizam operações com mais do que 12 dígitos.

respectivamente, mas também por aparecerem em pesquisas que aplicaram questionários semelhantes, como Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987) e Fischbein, Jehiam e Cohen (1995). Além disso, $\frac{22}{7}$ é uma conhecida aproximação decimal de π. Segundo Vinner (2011), em muitos países até professores reconhecem esse número como irracional. A nossa intenção foi verificar se os alunos classificariam esses números como irracionais ao não visualizar os períodos dessas frações, que são grandes.

Atividade 1A

Questionário – números racionais

1) Os números seguintes são racionais? Justifique suas respostas.

Número	Sim	Não	Justificativa
$\frac{-3}{14}$			
$\frac{\sqrt{3}}{2}$			
0,0555...			
1,010010001...			
2,343434...			
$\frac{4\pi}{3}$			
$\frac{22}{7}$			
1,725			
0,666...			

2) Como você define números racionais?

3) Na sua opinião, para que servem os números racionais?

4) Represente no intervalo abaixo os números $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{3}$ e $\frac{9}{4}$.

5) Quantos números racionais existem entre 2/3 e ¾?
   a. Um número
   b. Muitos números
   c. Infinitos números
   d. Nenhum número

6) Se a sua resposta no item anterior foi ‘a’, ‘b’ ou ‘c’, determine um número racional que esteja entre 2/3 e ¾. Não apague o desenvolvimento do raciocínio.

7) Como você se sentiu respondendo a esse questionário? Pode marcar mais de uma opção.

☐ Confiante

☐ Confuso

☐ Inseguro dos meus conhecimentos matemáticos

☐ Seguro dos meus conhecimentos matemáticos

☐ Outro sentimento.

Qual? ___________________________

Por que você acha que se sentiu assim?

Atividade 1B

Questionário – números irracionais

1) Os números seguintes são irracionais? Justifique suas respostas.

Número	Sim	Não	Justificativa
$\frac{13}{23}$			
$\frac{\sqrt{5}}{2}$			
3,1444...			
1,1212212221...			
$\sqrt[3]{27}$			
$\frac{3\pi}{4}$			
$\sqrt{3}+\sqrt{6}$			
1,222...			
3,1416			

2) O que são números irracionais:
a) segundo o que você aprendeu nas aulas de matemática?

b) na sua opinião?

3) O que te faz acreditar na existência de números irracionais?

4) Qual a diferença entre número racional e número irracional?

5) Marque verdadeiro (V) ou falso (F) e justifique:

Afirmação	V	F	Justificativa
Entre dois racionais há pelo menos um racional			
Entre dois irracionais há pelo menos um irracional			
Entre dois racionais há pelo menos um irracional			

Entre dois irracionais há pelo menos um racional			

6) Existe algum número irracional no intervalo (1/3, 1/2)? Em caso afirmativo, escreva esse número irracional em notação decimal. Em caso negativo, justifique.

7) Como você se sentiu respondendo a esse questionário? Pode marcar mais de uma opção.

☐ Confiante

☐ Confuso

☐ Inseguro dos meus conhecimentos matemáticos

☐ Seguro dos meus conhecimentos matemáticos

☐ Outro sentimento.

Qual?____

Por que você acha que se sentiu assim?

Atividade 2 – Manipulação algébrica

Justificativa

Em geral, as atividades propostas nos livros didáticos se resumem ao reconhecimento dos números irracionais. Exercícios do tipo “classifique os números em racionais ou irracionais” ou “identifique os números irracionais” são bastante comuns. Infelizmente, quase tudo o que é proposto para os alunos se resume a esses tipos de exercícios.

A manipulação algébrica de inteiros e racionais é amplamente trabalhada na educação básica. A soma, subtração, multiplicação e divisão desses números é discutida ao longo de vários anos e reforçada por diversas atividades propostas nos livros didáticos. Todavia, quando se trata de números irracionais, essas manipulações dificilmente aparecem nos livros didáticos. A proposta desta atividade é romper com essa prática que, a nosso ver, pouco contribuiu para a aprendizagem dos números irracionais.

Descrição

A ideia da atividade é fazer com que os alunos trabalhem realizando operações com números irracionais e percebam que a soma, subtração, multiplicação e divisão de dois números irracionais podem resultar em números racionais ou irracionais. Tecnicamente, dizemos que os irracionais não são fechados algebricamente para essas operações. Os números racionais, ao contrário, são fechados algebricamente em relação a essas operações.

Alguns exemplos para ilustrar o que estamos propondo:

- $\left(2-\sqrt{2}\right)(\text{irracional}) + \sqrt{2}\ (\text{irracional}) = 2\ (\text{racional})$
- $\left(2+\sqrt{2}\right)(\text{irracional}) + \sqrt{2}\ (\text{irracional}) = 2 + 2\sqrt{2}\ (\text{irracional})$
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ (Produto de irracionais que é irracional)
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ (Produto de irracionais que é racional)
- $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (Divisão de irracionais que é irracional)
- $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$ (Divisão de irracionais que é racional)

Observação:

Antes de aplicar a atividade, o professor deve ter trabalhado o seguinte teorema:

“Seja α um número irracional qualquer e r um número racional diferente de zero. Então, a adição, subtração, multiplicação e divisão de r e α resultarão em números irracionais. Também são irracionais os números -α e α^{-1}”.

Demonstração:

Suponha que $r_1 = \alpha + r,\ r_2 = \alpha - r, r_3 = r - \alpha, r_4 = r\alpha, r_5 = \frac{\alpha}{r}$ e $r_6 = \frac{r}{\alpha}$ sejam números racionais. Como a soma, subtração, multiplicação e divisão de números racionais resultam em números racionais, então também serão racionais os números $r_1 - r = \alpha,\ r_2 + r = \alpha, r - r_3 = \alpha,\ r_4/r = \alpha, r \cdot r_5 = \alpha$ e $r/r_6 = \alpha.$ Contradição! Logo, a soma, subtração, multiplicação e divisão envolvendo um número racional e um irracional resulta sempre em um número irracional.

Atividade

1) Dê exemplos de irracionais cuja soma seja um número:
a) Racional
b) Irracional

2) Dê exemplos de irracionais cuja subtração seja um número:

a) Racional
b) Irracional

3) Dê exemplos de irracionais cuja multiplicação seja um número:
a) Racional
b) Irracional

4) Dê exemplos de irracionais cuja divisão seja um número:
a) Racional
b) Irracional

Atividade 3 – Representação decimal

Justificativa

Reforçar a ideia da atividade anterior e trazer a representação decimal, que provavelmente foi deixada de lado na atividade anterior. Os alunos frequentemente trabalham com números irracionais escritos em forma de radicais.

Descrição

Como exemplo do que estamos propondo agora, apresentamos uma soma de irracionais que resulta em um número racional.

$$\begin{array}{r} 0{,}3131131113\ldots \\ + \\ 0{,}0202202220\ldots \\ \hline \\ 0{,}3333333333\ldots \end{array}$$

Atividade

Você consegue refazer a atividade anterior, porém, usando em seus exemplos números irracionais escritos na representação decimal?

Atividade 4 – Incomensurabilidade

Justificativa

A ideia de incomensurabilidade remonta às origens do número irracional. A ideia de que dois segmentos possam não ser comensuráveis, isto é, que não exista uma unidade capaz de medi-los simultaneamente, precisa ser trabalhada, já que está longe de ser óbvia. Intuitivamente, parece que é impossível que tal fato aconteça, já que diminuindo progressivamente a unidade, parece natural que, em dado momento, consiga-se um segmento tão pequeno que seja capaz de medir os dois segmentos.

Descrição

A atividade[48] tem a intenção de provocar, por meio de uma situação prática, a questão da incomensurabilidade. O lado de um azulejo que cobrirá uma parede assume o papel da unidade que pode ser diminuída o tanto que se queira. As dimensões da parede, largura e altura, assumem os papéis dos dois segmentos que supostamente seriam medidos pela unidade. A atividade não prova a

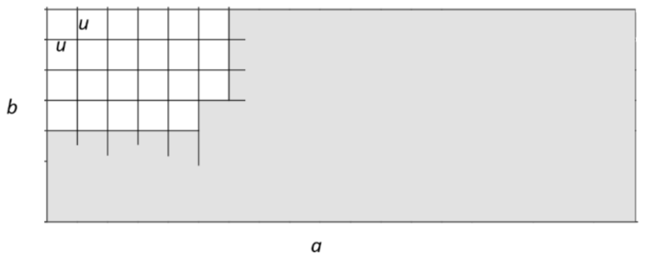
[48] Essa atividade foi retirada e adaptada de Soares, Ferreira e Moreira (1998).

existência de segmentos incomensuráveis (isso será feito na atividade seguinte), mas faz com que os alunos pensem a respeito dessa possibilidade.

Atividade

1) Deseja-se cobrir com azulejos toda uma parede que tem *a* metros de comprimento por *b* metros de altura. O azulejo é quadrado e tem o lado medindo *u* centímetros (Figura 18).

Figura 18 – Incomensurabilidade



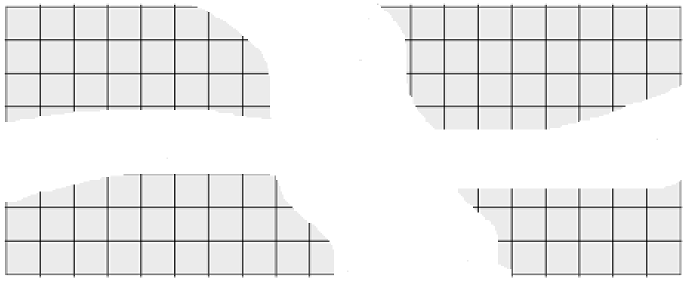
Perguntas:

a) É sempre possível cobrir toda a parede sem precisar cortar nenhum azulejo? Justifique sua resposta.

b) Imagine agora que seja possível pedir para a fábrica que faça os azulejos com o lado *u* tão pequeno quanto desejarmos. Com essa possibilidade em mente, responda: é sempre possível cobrir toda a parede sem precisar cortar nenhum azulejo? Justifique sua resposta.

2) Observe a Figura 19.

Figura 19 - Azulejos na parede



Considere um retângulo cujas dimensões, a e b, em cm, são dadas por:

R_1: $a = 35$ e $b = 15$

R_2: $a = 3{,}5$ e $b = 1{,}5$

R_3: $a = 35\sqrt{2}$ e $\mathrm{b} = 15\sqrt{2}$

R_4: $a = 35$ e $b = 15\sqrt{2}$

R_1	Esse retângulo pode ser dividido em um número inteiro de quadrados iguais, traçando retas verticais e horizontais como na Figura 19?
	Se for possível, qual é o número mínimo de quadrados necessários para cobrir o retângulo? Se for impossível, justifique.
R_2	Esse retângulo pode ser dividido em um número inteiro de quadrados iguais, traçando retas verticais e horizontais como na Figura 19?

<table>
<tr><td></td><td>Se for possível, qual é o número mínimo de quadrados necessários para cobrir o retângulo?
Se for impossível, justifique.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_3</td><td>Esse retângulo pode ser dividido em um número inteiro de quadrados iguais, traçando retas verticais e horizontais como na Figura 19?</td></tr>
<tr><td>Se for possível, qual é o número mínimo de quadrados necessários para cobrir o retângulo?
Se for impossível, justifique.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_4</td><td>Esse retângulo pode ser dividido em um número inteiro de quadrados iguais, traçando retas verticais e horizontais como na Figura 19?</td></tr>
<tr><td>Se for possível, qual é o número mínimo de quadrados necessários para cobrir o retângulo?
Se for impossível, justifique.</td></tr>
</table>

Atividade 5 - Medida de segmentos

Justificativa

Esta atividade, em conjunto com a anterior, tem o objetivo de tratar a questão da incomensurabilidade, além de reforçar a ideia de número como medida. Aqui se desenvolve essa ideia mostrando, geometricamente, que a diagonal de um quadrado é incomensurável com o lado do quadrado. Se o lado do quadrado mede 1, o que faremos aqui é equivalente a provar que $\sqrt{2}$ é irracional.

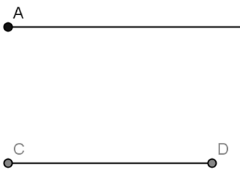
Descrição

O objetivo da atividade é encontrar um segmento que seja divisor comum de dois segmentos dados. Utiliza, para tanto, o processo de subtrações sucessivas, também conhecido como antifairese[49]. Os primeiros itens são para que o estudante possa familiarizar-se com esse processo e, no quarto item, quando os segmentos dados são o lado e a diagonal de um quadrado, pretende-se que o estudante conclua que eles são incomensuráveis.

[49] Para mais detalhes sobre antifairese e as atividades que nos baseamos para criar essa atividade, consultar Miguel (2009).

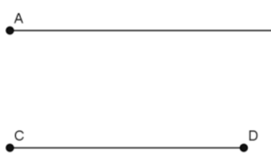
Atividade

1) Considere os segmentos AB e CD abaixo.



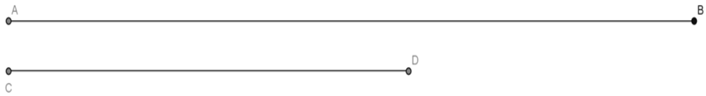
a) Extraia o segmento CD do segmento AB o maior número de vezes possível.
b) O segmento CD é divisor do segmento AB?
c) Escreva uma expressão do comprimento do segmento AB em função do comprimento do segmento CD.
d) O segmento CD é divisor comum de AB e CD?

2) Considere os segmentos AB e CD abaixo.



a) Extraia o segmento CD do segmento AB o maior número possível de vezes.
b) O segmento CD é divisor do segmento AB?
c) Existiu alguma sobra? Chame essa sobra de segmento EB.
d) Concorda que se o segmento EB for divisor do segmento CD o problema estará resolvido? Discuta com seu parceiro.
e) Extraia o segmento EB do segmento CD o maior número possível de vezes;
f) Após a subtração anterior, existiu alguma sobra no segmento CD?
g) Escreva uma expressão do comprimento do segmento CD em função do comprimento do segmento EB.
h) Escreva uma expressão do comprimento de AB em função do comprimento de EB.
i) O segmento EB é divisor comum de AB e CD?

3) Considere os segmentos AB e CD abaixo.

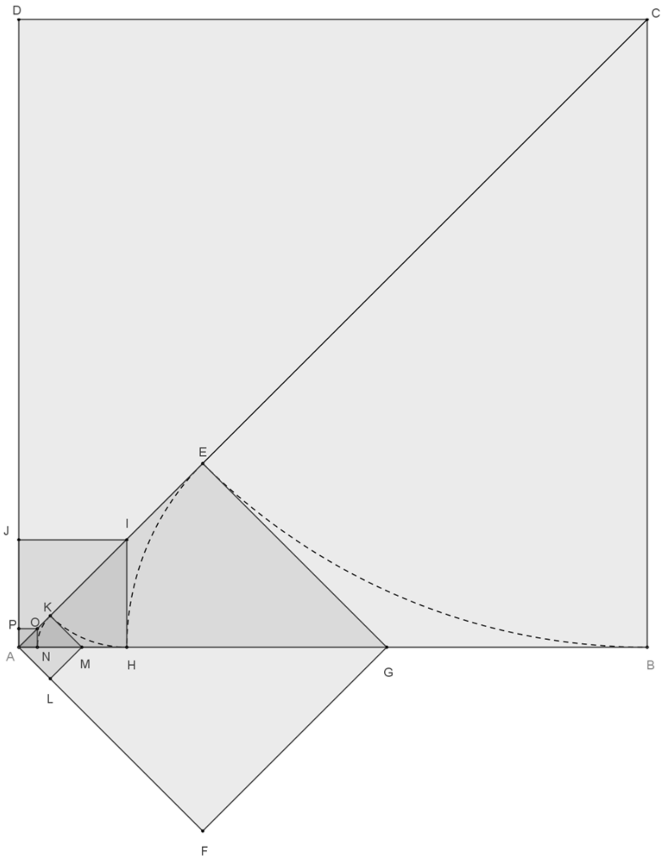


a) Utilize um processo semelhante ao item anterior para encontrar um segmento que é divisor comum de AB e CD.

b) Escreva AB em função de CD.PODE-SE DIZER QUE A MEDIDA COMUM, QUANDO EXISTE, É SEMPRE IGUAL OU MENOR DO QUE A MENOR DAS SOBRAS?

4) O objetivo agora é encontrar um segmento que seja medida comum do lado e da diagonal do quadrado ABCD. Observe a Figura 20 e diga se o raciocínio a seguir está perfeito ou tem algum problema. Se encontrar algum problema, explique.

Figura 20 - Incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado



Afirmação 1: BC cabe uma vez em AC e sobra AE.

Afirmação 2: Se existir uma unidade comum aos segmentos BC e AC, ela é menor ou igual à sobra AE.

Afirmação 3: AE = EG = GB.

Afirmação 4: AE cabe duas vezes em BC e sobra AH.

Afirmação 5: Se existir uma unidade comum aos segmentos BC e AC, ela é menor ou igual à sobra AH.

Afirmação 6: AH = HI = IE.

Afirmação 7: AH cabe duas vezes em AE e sobra AK.

Afirmação 8: Se existir uma unidade comum aos segmentos BC e AC, ela é menor ou igual à sobra AK.

Afirmação 9: O processo pode continuar indefinidamente: uma sobra cabe duas vezes na sobra anterior, e ainda sobra alguma coisa.

Afirmação 10: Se existisse uma unidade comum aos segmentos BC e AC, essa unidade seria menor ou igual à menor das sobras. Como vimos, o processo não acaba nunca e por isso não existe a menor das sobras. Os segmentos BC e AC são, portanto, incomensuráveis.

Atividade 6 - Equivalência de definições

Justificativa

As definições mais comumente encontradas nos livros didáticos de matemática para os números irracionais são: i) números reais que não são racionais; ii) números que não podem ser escritos como quociente de dois números inteiros e iii) números que possuem representação decimal infinita e não periódica. Dentre essas definições, as duas últimas possuem uma estreita relação, que dificilmente é demonstrada nos livros didáticos. A intenção da atividade é fazer com que os estudantes entendam que existe uma equivalência entre as definições 'ii' e 'iii', isto é, um número não pode ser escrito como quociente de inteiros se, e somente se, possui representação decimal infinita e não periódica.

Descrição

Cada grupo trabalha com um grupo de frações com um mesmo denominador. A ideia é que os estudantes façam as divisões pelo método longo (ou método da chave) e percebam o padrão dos restos que é formado. Daí a intenção é que eles entendam que, pela possibilidade limitada dos restos (eles poderão varia de 0 até $q-1$, onde q é o divisor), sempre existirá um padrão de repetição de restos, e esse padrão é exatamente o que vai gerar a dízima periódica. Portanto, toda divisão de inteiros vai gerar uma dízima finita ou uma dízima infinita e periódica. Finalmente, se o número irracional não pode ser gerado pelo quociente de dois inteiros, então ele não pode ser representado por uma dízima finita ou infinita e periódica.

A atividade foi desenvolvida para ser realizada em grupos. A dinâmica sugerida é que cada grupo trabalhe separadamente e, depois, seja realizada uma plenária, com a apresentação dos resultados atingidos. O professor deve mediar esse processo para garantir que seja realizado um debate de qualidade, isto é, que avance na direção dos objetivos pretendidos com a atividade.

Atividade

GRUPO 1

1) Encontre as representações decimais das frações 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7, 7/7, 8/7 e 9/7 utilizando o algoritmo da divisão. IMPORTANTE: NÃO APAGUE AS CONTAS!

Agora responda:

a) Os números encontrados acima são:

☐ Todos racionais

☐ Todos irracionais

☐ Alguns são racionais e alguns são irracionais. Especifique quais são racionais e quais são irracionais e justifique.

b) A parte periódica das dízimas encontradas acima é formada por quantos algarismos?

c) Toda fração com denominador 7 terá seis algarismos na parte periódica? Justifique.

d) Olhando para as divisões parciais, responda: qualquer número pode ser resto dessas divisões? Ou as possibilidades para os restos das divisões parciais são limitadas? Por quê?

e) Considere a seguinte afirmação: “toda fração com numerador inteiro *m* e denominador inteiro *n* vai produzir uma dízima periódica com *n-1* algarismos na parte periódica”. Essa regra é válida? Justifique ou apresente um contraexemplo.

f) Observe a conta a seguir. Cada letra representa um número que foi acidentalmente apagado.

$$
\begin{array}{l|l}
32 & 7 \\ \hline
40 & 4{,}5pqrst \\
\ \ a & \\
\ \ \ \ b & \\
\ \ \ \ \ \ c & \\
\ \ \ \ \ \ \ d & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ e &
\end{array}
$$

É possível determinar, apenas com as contas já realizadas no item ‘1’, os valores de *a, b, c, d, e, p, q, r, s* e *t*? Em caso afirmativo, como é possível fazer isso?

GRUPO 2

1) Encontre as representações decimais das frações 2/17, 3/17, 4/17, 5/17, 6/17, 7/17, 8/17 e 9/17 utilizando o algoritmo da divisão. IMPORTANTE: NÃO APAGUE AS CONTAS!

Agora responda:

a) Os números encontrados acima são:

☐ Todos racionais

☐ Todos irracionais

☐ Alguns são racionais e alguns são irracionais. Especifique quais são racionais e quais são irracionais e justifique.

b) A parte periódica das dízimas encontradas acima é formada por quantos algarismos?

c) Toda fração com denominador 17 terá dezesseis algarismos na parte periódica? Justifique.

d) Olhando para as divisões parciais, responda: qualquer número pode ser resto dessas divisões? Ou as possibilidades para os restos das divisões parciais são limitadas? Por quê?

e) Considere a seguinte afirmação: “toda fração com numerador inteiro *m* e denominador inteiro *n* vai produzir uma dízima periódica com *n-1* algarismos na parte periódica”. Essa regra é válida? Justifique ou apresente um contraexemplo.

f) Observe a conta a seguir. Cada letra representa um número que foi acidentalmente apagado.

$$
\begin{array}{l|l}
252 & 17 \\ \hline
82 & 14{,}82a_1b_1c_1 \ldots m_1n_1o_1 \\
\;140 & \\
\;\;40 & \\
\;\;\;a_2 & \\
\;\;\;\;b_2 & \\
\;\;\;\;\;c_2 & \\
\;\;\;\;\;\;\ldots & \\
\;\;\;\;\;\;\;m_2 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;n_2 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;o_2 &
\end{array}
$$

É possível determinar, apenas com as contas já realizadas no item '1', os valores de $a_1b_1c_1 \ldots m_1n_1o_1$ e de $a_2b_2c_2 \ldots m_2n_2o_2$? Em caso afirmativo, como é possível fazer isso?

GRUPO 3

1) Encontre as representações decimais das frações 2/13, 3/13, 4/13, 5/13, 6/13, 7/13, 8/13 e 9/13 utilizando o algoritmo da divisão. IMPORTANTE: NÃO APAGUE AS CONTAS!

Agora responda:

a) Os números encontrados acima são:

☐ Todos racionais

☐ Todos irracionais

☐ Alguns são racionais e alguns são irracionais. Especifique quais são racionais e quais são irracionais e justifique.

b) A parte periódica das dízimas encontradas acima é formada por quantos algarismos?

c) Toda fração com denominador 13 terá seis algarismos na parte periódica? Justifique.

d) Olhando para as divisões parciais, responda: qualquer número pode ser resto dessas divisões? Ou as possibilidades para os restos das divisões parciais são limitadas? Por quê?

e) Observe a conta a seguir. Cada letra representa um número que foi acidentalmente apagado.

$$
\begin{array}{l|l}
51 & 13 \\ \cline{2-2}
120 & \quad 3{,}9abcde \\
\ \mathit{30} & \\
\ \ x & \\
\ \ y & \\
\ \ z & \\
\ \ w & \\
\ \ \ v &
\end{array}
$$

É possível determinar, apenas com as contas já realizadas no item ‘1’, os valores de $a, b, c, d, e, x, y, z, w, v$? Em caso afirmativo, como é possível fazer isso?

Formulário individual (para todos os grupos)

2) Considerando as apresentações de todos os grupos, diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas e justifique:

a) A representação decimal de qualquer fração de inteiros é necessariamente uma dízima periódica.

☐ Verdadeiro

☐ Falso

Por quê?

b) Toda dízima periódica pode ser convertida em fração de inteiros.

☐ Verdadeiro

☐ Falso

Por quê?

c) A representação decimal de um número que NÃO pode ser escrito como fração de inteiros é necessariamente uma dízima Não-periódica.

☐ Verdadeiro

☐ Falso

Por quê?

d) Toda dízima Não-periódica NÃO pode ser convertida em fração de inteiros.

☐ Verdadeiro

☐ Falso

Por quê?

Atividade 7 - Diálogo de Ralf e Beto

Justificativa

A dificuldade dos jovens com a matemática em geral, e em particular com os números irracionais, deve-se em certa parte à linguagem. Pretende-se com essa atividade "falar a língua do jovem", sem abrir mão, é claro, de objetivos pré-determinados e dentro de um planejamento. A representação de um número desempenha um papel importante na aprendizagem do assunto e, muitas vezes, o próprio conceito de número é confundido com sua representação (BROETTO, 2016; IGLIORI; SILVA, 1998). Portanto, o objetivo da atividade é abordar a questão da representação decimal a partir de uma linguagem própria dos jovens.

Descrição

Criamos uma situação fictícia que descreve a conversa informal de dois jovens, Ralf e Beto, sendo que um deles esteve na aula e vai narrar o que foi ensinado para aquele que faltou à aula. A dinâmica sugerida para a atividade é que sejam formados grupos para leitura do texto e resposta das questões propostas ao final da atividade. Por fim, deve-se realizar uma plenária com todos os alunos para que sejam debatidas as respostas fornecidas.

Atividade

1) Leia e reflita acerca da conversa abaixo .

Ralf*: E aí camarada, foi à aula hoje? O que o professor passou?*

Beto*: Fui. Cara, passou um negócio muito doido... números irracionais!*

Ralf: *Que coisa é essa? Números que não pensam? Hehehehe.*

Beto*: Não, claro que não, ô cabeção! São números que não sabemos a última casa decimal.*

Ralf*: Como assim não sabemos a última casa decimal?*

Beto*: Tipo assim, 0,12597483...*

Ralf*: Ah, mas em 1,333... eu também não sei a última casa decimal! Então ele é irracional?*

Beto*: Não, 1,333... é racional. A última casa é 3! Os pontinhos depois do 3 significam que o 3 sempre repete, logo, a última casa é 3! Tô sabendo rapá!*

Ralf*: Mas peraí. Quantas casas tem depois da vírgula em 1,333... ?*

Beto*: Infinitas, oras! Faltar aula dá nisso, tá vendo?*

Ralf: *Pera lá, cara pálida! Se têm infinitas casas depois da vírgula como você pode falar que sabe a última casa? Na verdade, nem pode existir última casa! Não são infinitas? Então não existe última casa!*

Beto*: Ixi, é mesmo... [pensa por alguns instantes] Ah, mas eu posso saber qualquer casa que eu quiser. A bilionésima casa vai ser um 3, a trilionésima casa vai ser um 3! Por isso é racional.*

Ralf: *Ah, então irracional é o contrário, né?*

Beto*: Isso! Irracional é quando não dá pra saber uma casa qualquer, tipo, em 0,4526793..., qual é a 100ª casa? Entendeu? Nossa, tem que ter muita paciência com esse povo que falta aula...*

2) O que você achou das explicações de número irracional dadas por Beto?

3) Concorda com tudo ou discorda de alguma coisa? Se discorda, por quê?

4) Se você fosse Beto, explicaria de forma diferente? Como?

5) Explique para todos os colegas da sala o que vocês discutiram no grupo.

Atividade 8 - Diálogo de Ralf e Beto (continuação)

Descrição

A atividade tem os mesmos objetivos da atividade anterior.

Atividade

1) Observe a conversa abaixo.

Ralf*: Lembra do que você me falou ontem? Que em 0,4526793... não dá pra saber a 100ª casa?*

Beto*: Sim, claro!*

Ralf*: E se lá pelas tantas, alguma coisa começar a se repetir e não parar mais, tipo 0,4526793...1111...?*

Beto*: Aí vai ser racional, tipo 1,333... Mas o que eu queria dizer com 0,4526793... é que não tem essas repetições.*

Ralf*: Tipo, se nada se repetiu antes das reticências é porque não vai se repetir depois. Entendi.*

Beto*: Ufa!*

Ralf*: Mas peraí. Eu pensei em um número agora. 0,33343536...é racional ou irracional?*

Beto*: Irracional, não tá repetindo nada antes das reticências!*

Ralf: *Pera lá cara pálida! Mas eu consigo saber a 100ª casa, ou a casa que eu quiser, porque as casas depois da vírgula têm uma 'lógica'. Logo, pelo que você disse ontem, será um número racional!*

Beto*: [pensando, com cara de mal] Agora você conseguiu me confundir... Por que você faltou à aula, hein Ralf? Que saco! Agora fiquei com dúvida na parada!*

2) A que 'lógica' você acha que Ralf se refere em relação a 0,33343536...?

3) Considerando que existe um padrão em 0,33343536...é realmente possível encontrar uma casa qualquer? Caso afirmativo, encontre a 50ª casa. Caso negativo, explique.

4) 0,33343536... [com um padrão] é racional ou irracional? Justifique.

5) Escreva um número irracional no intervalo (1/3, ½) sem recorrer a irracionais conhecidos nem à calculadora.

Caso o professor tenha aplicado três atividades ou mais, essa atividade tem o objetivo de fazer um fechamento de todo o processo. Consiste em apenas uma pergunta, com vários subitens, para que não se obtenha apenas respostas muito vagas.

Atividade

Após realizar as atividades referentes a números irracionais, responda, com suas palavras:

O que é um número irracional?

Qual a utilidade dos números irracionais?

Em que circunstâncias eles surgem na matemática?

Na sua vida diária, você acha que precisa dos números irracionais?

Referências

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ACZEL, Amir. **O mistério do alef**: a matemática, a cabala e a procura pelo infinito. São Paulo: Globo, 2003.

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à lógica**. São Paulo: Nobel, 2002.

ANDERSEN, Harold. A nontraditional introduction to irrational numbers. **The Mathematics Teacher**, v. 61, n. 3, p. 272–275, 1968.

ARAGONA, Jorge. **Números reais**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

ARAÚJO, Marcos Paulo Ferreira de. **Introdução ao conceito de números reais:** uma proposta didática baseada na História da Matemática. 2011. 47 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

ARCAVI, Abraham. **History of mathematics as a component of mathematics teacher's background.** 1985. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências). Weizmann Institute of Science, Rehovot, 1985.

ARCAVI, Abraham; BRUCKHEIMER, Maxim; BEN-ZVI, Ruth. History of mathematics for teachers: the case of irrational numbers. **For the Learning of Mathematics**, v. 2, n. 7, p. 18–23, 1987.

ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

______. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. Ed. São Paulo: LTC, 2000.

______. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. **Revista do Professor de Matemática**, n. 5, p. 6–11, 1984.

BALDINO, Roberto Ribeiro. A ética de uma definição circular de número real. **Bolema**, v. 9, n. 10, p. 31–52, 1994.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; NASCIMENTO, Vanderlei M. do. **Um tratamento via medição para os números reais.** Coleção História da Matemática para Professores. Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2005.

BASS, Hyman. Quantities, numbers, number names and the real number line. In: ICMI 23, 2015, Macau. **Anais**... Macau: ICMI, 2015, p. 10 - 20.

BECKMANN, Petr. **A history of pi**. 3. ed. Nova Iorque: St. Martin' Press, 1974.

BELL, Eric Temple. **Men of mathematics**: the lives and achievements of the great mathematicians from Zeno to Poincare. Nova Iorque: Simon & Schuster, 1986.

BENTLEY, Peter. **O livro dos números**: uma história ilustrada da matemática. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 2009.

BERGÉ, Analía. The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 3, p. 217–235, 2008. Disponível em: http://link.springer.com/10.1007/s10649-007-9101-5.

BLOG MANTHANO. Uma prova de que pi é irracional. 2012. Disponível em: http://manthanos.blogspot.com.br/2012/12/uma-prova-de-que-e-irracional_20.html. Acesso em: 27 ago. 2014.

BOYER, Carl. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. **Exame Nacional do Ensino Médio**. Brasília: MEC/Inep, 2011a. Disponível em:

http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/07_AZUL_GAB.pdf.

______. **Matriz de referência Prova Brasil** - matemática - 8a série do Ensino Fundamental. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2011b. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/web/prova-brasil-e-saeb/o-que-cai-nas-provas.

______. **Matriz de referência para o ENEM 2009**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2009.

______. **Plano de Desenvolvimento da Educação**. SAEB - ensino médio: matrizes de referência e tópicos descritores. Brasília: MEC/SEB, 2008b.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2000.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática (3° e 4° ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITT, Deborah. On irrational numbers. **The Mathematics Teacher**, v. 91, n. 5, p. 371 - 396, 1998.

BROETTO, Geraldo Claudio. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura**

em matemática. 2016. 417 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

______. **Resolução de problemas e desempenho escolar em matemática no ensino fundamental**. 2004. 221 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2004.

CAJORI, Florian. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Moderna, 2007.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais de matemática**. Lisboa: Fotogravura Nacional, 1951.

CARMO, Manfredo Perdigão do. Geometrias não-euclidianas. **Revista Matemática Universitária**, n. 6, p. 25–48, 1987.

CARNEIRO, José Paulo. O problema do amigo oculto. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 28, p. 21-26, 1995.

CEZAR, Mariana dos Santos. **Produções de significados matemáticos na construção dos números reais.** 2014. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

______. **Concepções acerca do conceito de números reais:** uma breve reflexão sobre seu ensino na educação básica. 2011. 64 f. Monografia (Especialização em

Ensino de Matemática). Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, 2011.

CORBO, Olga. **Seção áurea:** um contexto para desenvolver a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta. 2005. 243 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DAMAZIO, Ademir; ROSA, Josélia Euzébio da; EUZÉBIO, Juliana da Silva. O ensino do conceito de número em diferentes perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 14, n. 1, p. 209–231, 2012.

DANTZIG, Tobias. **Number -** the language of science. 4. ed. Nova Iorque: Pi Press, 1970.
DEWDNEY, Alexander Keewatin. **20.000 léguas matemáticas** - um passeio pelo misterioso mundo dos números. São Paulo: Zahar, 2000.

DIAS, Marisa da Silva. **Reta real:** conceito imagem e conceito definição. 2002. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2002.

DIAS, Marisa da Silva; COBIANCHI, Antônio Sérgio. Correlação do lógico e do histórico no ensino dos números reais. In: ENCONTRO PAULISTA DE

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo. **Anais**... São Paulo: FEUSP, 2004, p. 1–11.

DUTCH, Steven. **Pi in the Bible**. Disponível em: https://www.uwgb.edu/dutchs/pseudosc/pibible.htm. Acesso em: 19 mar. 2015.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. 2. ed. Campinas: Papirus, 2003. p. 11–33.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Números irracionais e transcendentes**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

______. **Análise na reta**. Rio de Janeiro: IMPA/Cnpq, 1973.

FINDING Pi by Archimedes' Method. Produção: Mathwithoutborders.com. 2012. 16 min. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=_rJdkhlWZVQ. Acesso em 14 jun. 2014.

FISCHBEIN, Efraim; JEHIAM, Ruth; COHEN, Dorit. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. **Educational Studies in Mathematics**, n. 29, p. 29–44, 1995.

FOWLER, David. **The mathematics of Plato's academy**: a new reconstruction. 2. ed. Oxford: Clarendon Press, 1999.

______. Ratio in early greek mathematics. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 1, n. 6, p. 807–846, 1979.

GARBI, Gilberto. **A rainha das ciências**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GARCIA, Vera Clotilde; SOARES, Débora da Silva; FRONZA, Juliana. **Ensino dos números irracionais no nível fundamental**. v. 1. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.

GARDNER, Martin. The transcendental number e. In: GARDNER, M. **The unexpected hanging and other mathematical diversions -** a classic collection of puzzles and games from Scientific American. Chicago: University of Chicago Press, 1991.

GLEISER, Marcelo. **A dança do universo**: dos mitos de criação ao Big-Bang. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

GOMES, Maria Laura Magalhães. Aspectos históricos da abordagem dos números irracionais na matemática escolar brasileira: no tempo da aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 6., 2005, Brasília. **Anais**... Brasília: SBHMAT, 2005, p. 195–204.

GONÇALVES, Carlos. Abstract and measure numbers in the Diyala region: an example of fluctuating and overlapping roles. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF HISTORY OF SCIENCE, TECHNOLOGY AND MEDICINE, 24., 2013, Manchester. **Anais**… Disponível em: http://www.ichstm2013.com/programme/guide/p/1091.html .

GONÇALVES, Carlos; POSSANI, Claudio. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga. **Revista Matemática Universitária**, p. 16–24, dez. 2009.

HAVIL, Julian. **The irrationals -** a story of the numbers you can’t count on. Nova Jérsei: Princeton University Press, 2012. Livro eletrônico.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**: complexos, polinômios, equações. 7. ed. São Paulo: Atual, 2005.

IFRAH, Georges. **Os números**: a história de uma grande invenção. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo; SILVA, Benedito Antônio da. Conhecimentos das concepções prévias de estudantes sobre números reais: um suporte para melhoria do ensino-aprendizagem. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 21., 1998, Caxambu. **Anais**... Caxambu: Anped, 1998.

KASNER, Edward; NEWMAN, James R. **Matemática e imaginação**. Rio de Janeiro: Zahar, 1968.

KATZ, Victor J. **A history of mathematics**: an introduction. 3. Ed. Boston: Pearson Education, 2009.

KLEIN, Felix. **Elementary mathematics from an advanced standpoint**. Londres: Mcmillian and Co., 1932.

KLEIN, Jacob. **Greek mathematical thought and the origin of algebra**. Nova Iorque: Dover Publications, 1992. Livro eletrônico. Publicado originalmente em 1968.

KLINE, Morris. **Mathematical thought from ancient to modern times**. vol. 1. Nova Iorque: Oxford University Press, 1972a.

______. **Mathematical thought from ancient to modern times**. vol. 3. Nova Iorque: Oxford University Press, 1972b.

LACZKOVICH, Miklós. On Lambert's proof of the irrationality of π. **American Mathematical Monthly**, v. 104, n. 5, p. 439, 1997. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/2974737?origin=crossref.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio**. vol. 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

LIMA, Elon Lages (Ed.). **Exame de textos**: análise de livros de matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBM, 2001.

______. **Curso de Análise**. vol. 1. 8. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 1995.

______. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

LIVIO, Mario. **Deus é matemático?** Rio de Janeiro: Record, 2010.

MAOR, Eli. **e**: a história de um número. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MARCHIORI, Roberto Miachon. **Números transcendentes e de Liouville.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro, 2013

MARTINS, Juliana. **O livro que divulgou o papiro Rhind no Brasil**. 2015. 232 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro, 2015.

MELO, Severino Barros de. **A compreensão do conceito de número irracional**: uma radiografia do problema e uso da história como uma alternativa de superação. 1999. 222 f. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 1999.

MENDES, Iran Abreu. **Números** – o simbólico e o racional na história. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

MENDES, Sônia Cristina da Cruz. **Práticas pedagógicas para o ensino dos números irracionais**. 2012. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012.

MIGUEL, Antônio. Números irracionais: a constituição de um estudo histórico-pedagógico. In: MIGUEL, Antônio *et al*. (Org.). **História da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 179–319.

MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides**: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração Editorial, 2010.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. Malba Tahan e uma demonstração geométrica de irracionalidade. **Revista do Professor de Matemática**, ano 33, n. 87, p. 12 – 14, 2015.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti. **O Conhecimento matemático do professor**: formação na licenciatura e prática docente na escola básica. 2004. 202 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; FERREIRA, Maria Cristina Costa. O que é número real? Os números reais na formação do professor de matemática. In: CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto (Org.). **Formação do professor de matemática**: reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul: IPR, 2012. p. 49–94.

MOSCA, Marcos Antônio. **Números irracionais no ensino médio**: desdobrando o tema com equações polinomiais. 2013. 106 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

MOXHAY, Peter. Assessing the scientific concept of number in primary school children. In: ISCAR, 2008, San Diego. **Anais**... San Diego: ISCAR, 2008. p. 1–24.

MUIR, Jane. **Of men and numbers** - the story of the great mathematicians. Nova Iorque: Dover, 1996.

NIVEN, Ivan. **Números**: racionais e irracionais. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1990.

______. A simple proof that pi is irrational. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 53, n. 1, p. 509–510, 1947.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à matemática**: um curso com problemas e soluções. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. vol. 1. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PASQUINI, Regina Célia Guapo. **Um tratamento para os números reais via medição de segmentos**: uma proposta, uma investigação. 2007. 209 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

PENTEADO, Cristina Berndt. **Concepções de professores do ensino médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a**

procedimentos para a abordagem desta propriedade. 2004. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

POINCARÉ, Henri. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. (A primeira edição dessa obra, em língua inglesa, foi publicada em 1945).

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico**: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais. 2012. 246 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

______. O número de Eüler: possíveis abordagens no ensino básico. In: SEMINÁRIOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA/SEMA–FEUSP, São Paulo, 2010. Disponível em: http://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf.

______. Frações Contínuas no ensino médio? In: SEMINÁRIOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA/SEMA–FEUSP, São Paulo, 2009. Disponível em: http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3812/20211/CO+2009+2sem+SEMA+FEUSP+Fra%C3%A7%C3%B5es+Cont%C3%ADnuas.pdf.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 468 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

REZENDE, Wanderley Moura; MENDONÇA, Ana Clara Pessanha Teixeira de; PEREIRA, Rodrigo Viana. (Re) Construindo o conceito de número racional. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais**... Curitiba: SBEM, 2013. Disponível em: http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/949_504_ID.pdf

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 2012.

ROQUE, Tatiana; GIRALDO, Victor Augusto. **O saber do professor de matemática**: ultrapassando a dicotomia entre didática e conteúdo. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

ROSA, António Pereira. Números irracionais no ensino secundário. **Gazeta de Matemática**, v. 142, p. 32–36, 2002.

ROSSMEISSL, John; WEBBER, Frederick. Incomensuráveis e números irracionais. In: GUNDLACH, Bernard (Org.). **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula** - números e numerais. São Paulo: Atual, 1992, p. 54–56.

SILVA, Ana Lúcia Vaz. **Números reais no ensino médio -** identificando e possibilitando imagens conceituais. 2011. 340 f. Tese (Doutorado em Ciências Humanas – Educação). Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2011.

SILVA, Benedito Antonio da; PENTEADO, Cristina Berndt. Fundamentos dos números reais: concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio. **Educação Matemática em Pesquisa**, v.11, n. 2, p.351-371, 2009.

SILVA, Gratuliano Erigoi Alves da. **Um estudo sobre a aprendizagem de números irracionais no ensino médio**. 2006. 180 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

SILVA, Jairo José da. **Filosofias da matemática**. São Paulo: Editora Unesp, 2007.

SIROTIC, Natasa. **Prospective secondary mathematics teachers' understanding of irrationality**. 2004. 219 f. Dissertação (Mestrado em Ciências). Simon Fraser Universtiy, Burnaby, 2004.

SIROTIC, Natasa; ZAZKIS, Rina. Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 65, n. 1, p. 49–76, 2007. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/s10649-006-9041-5>. Acesso em: 25 set. 2013.

SMITH, David Eugene. **History of mathematics**. vol. 2. Boston: Ginn & Co., 1925.

SMITH, Sanderson. **Agnesi to Zeno**: over 100 vignettes from the history of math. Emeryville: Key Curriculum Press, 1996.

SOARES, Eliana Farias; FERREIRA, Maria Cristina Costa; MOREIRA, Plinio Cavalcanti. Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. **Zetetiké**, v. 7, n. 12, p. 95–117, 1999.

______. **Números racionais e reais -** as concepções dos alunos e a formação do professor. 1998. UFMG/SPEC/CAPES: Belo Horizonte, 1998.

SOUSA, Rubens Oliveira de. **Alguns métodos interessantes de extração e aproximação da raiz quadrada**. 2013. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

SOUTO, Alexandre Machado. **Análise dos conceitos de número irracional e número real em livros didáticos da educação básica**. 2010. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

SPIVAK, Michael. **Calculus**. Nova Iorque: W. A. Benjamin, 1967.

STEWART, Ian. **Almanaque das curiosidades matemáticas**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

STRUIK, Dirk. **A concise history of mathematics**. 4. ed. Nova Iorque: Dover, 1987.

TALL, David; SCHWARZENBERGER, Rolph. Conflicts in the learning of real numbers and limits. **Mathematics Teaching**, n. 82, p. 44–49, 1978.

THOMSON, William; JUNGE, Gustave. **The commentary of Pappus on book X of Euclid's Elements**. Cambridge: Harvard University Press, 1930.

TSABAN, Garber. On the rabinical aproximation of pi. **Historia Mathematica**, v. 25, n. 1, p. 75–84, 1998.

VINNER, Shlomo. The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. **ZDM**, v. 43, n. 2, p. 247–256, 2011. Disponível em: http://link.springer.com/10.1007/s11858-010-0304-3.

ZAZKIS, Rina; SIROTIC, Natasa. Making sense of irrational numbers: focusing on representation. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, **Anais**... Bergen: PME, 2004, p. 497–504.

Apêndice A – Prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$

Antes de apresentarmos algumas demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$ convém tratar, ainda que brevemente, de duas questões: o que é uma demonstração matemática? Existe mais de um método para realizar uma demonstração matemática? Para responder à primeira pergunta, definimos primeiro o que é uma **proposição** ou **sentença**: *frase afirmativa em forma de oração, com sujeito, verbo e predicado, que ou é falsa ou é verdadeira, sem dar lugar a uma terceira alternativa* (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010, p. 2). Considere as seguintes frases:

(a) Choveu em Vila Velha ontem.

(b) Buenos Aires é a capital do Brasil.

(c) Se correr, o bicho pega. Se ficar, o bicho come.

(d) Você está muito devagar!

(e) O quadrado de um número ímpar é sempre um número ímpar.

As frases (a), (b) e (e) são claramente sentenças, pois podemos decidir se são verdadeiras ou falsas, o que não ocorre em relação a (c) e (d).

Um tipo especial de sentença são as **proposições condicionais**, formadas a partir de duas proposições P e Q, e escritas da seguinte forma: "Se P, então Q" ou, simbolicamente, por $P \Rightarrow Q$. P é chamada de hipótese e Q é chamada de tese. Como exemplo, vamos transformar uma proposição em uma proposição condicional. Utilizando a sentença (e), dada acima, podemos escrever uma sentença equivalente (e'): "Se n é ímpar (P), então n^2 é ímpar (Q)". A partir de uma proposição condicional chamada de **positiva**, é possível criar novas proposições que desempenham um papel importante na matemática. Tratam-se da **recíproca** e da **contrapositiva**.

A recíproca é obtida pela troca da hipótese com a tese. Por exemplo, se temos a proposição positiva "sou vegetariano, logo não como carne", a recíproca seria "não como carne, logo sou vegetariano". A contrapositiva é obtida pela negação da recíproca. Utilizando o exemplo anterior, partindo da mesma proposição positiva "sou vegetariano, logo não como carne", a contrapositiva seria "como carne, logo não sou vegetariano". Um exemplo próprio da matemática seria:

Considere um triângulo ABC cujos lados medem a, b e c e o maior lado mede a.

Positiva: Se ABC é um triângulo retângulo, então $a^2 = b^2 + c^2$.

Recíproca: Se $a^2 = b^2 + c^2$, então ABC é um triângulo retângulo.

Contrapositiva: Se $a^2 \neq b^2 + c^2$, então ABC não é um triângulo retângulo.

Estamos agora em condições de responder à nossa primeira pergunta. Segundo Oliveira e Fernández (2010), *uma demonstração matemática é o processo de raciocínio lógico e dedutivo para checar a veracidade de uma proposição condicional* (p. 9). Quanto à segunda pergunta, citamos três métodos de demonstração: a demonstração direta, a demonstração por contraposição e a demonstração por redução ao absurdo. A **demonstração direta** é aquela em que *assumimos a hipótese como verdadeira e através de uma série de argumentos verdadeiros e deduções lógicas concluímos a veracidade da tese* (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010, p. 11). Por exemplo, uma demonstração direta para a proposição condicional (e') seria a seguinte:

Se n é ímpar, então podemos escrever $n = 2k + 1$, onde k é um inteiro positivo. Daí, temos $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Ou seja, n^2 é ímpar.

A **demonstração por contraposição** utiliza a forma contrapositiva da proposição. Esse método é baseado no fato de que a veracidade da forma contrapositiva implica na veracidade da forma positiva. Por conta disso, a demonstração por contraposição é sempre uma opção, principalmente quando a demonstração direta apresenta alguma dificuldade. Por exemplo, como demonstraríamos de forma direta que "se n^2 é par, então n é par"? Podemos observar que $4 = 2^2, 16 = 4^2, 36 = 6^2$, e mesmo que verificássemos bilhões de números, ainda restariam números para serem verificados. A saída, nesse caso, é optar pela demonstração por contraposição (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010). Pois bem, se chamamos a proposição "se n^2 é par, então n é par" de forma positiva, a contrapositiva será "se n não é par, então n^2 não par", que é equivalente a "se n é ímpar, então n^2 é ímpar", que já demonstramos anteriormente.

O terceiro método de demonstração é a **redução ao absurdo**. Consiste em assumir a hipótese como verdadeira e a tese como falsa. A partir de argumentos verdadeiros, se se consegue chegar à falsidade de uma afirmação que é claramente verdadeira, conclui-se que a tese então deverá ser verdadeira. Temos vários exemplos a seguir de demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$ que utilizam o método da redução ao absurdo.

Demonstrações por redução ao absurdo

1 – Suponha que $\sqrt{2}$ é racional. Sendo assim, podemos escrever $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e primos entre si. Daí isso implica que $a^2 = 2b^2$. Partindo do conhecimento de que o quadrado de um número par é sempre par e que o quadrado de um número ímpar é sempre ímpar, temos:

a^2 é par, logo a é par. Escrevemos $a = 2k$, k inteiro, e substituímos em $a^2 = 2b^2$. $(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2$. Isso implica que b^2 é par, e que, portanto, b é par. Como "onde a e b são inteiros e primos entre si", chegamos a uma contradição, e concluímos que a nossa tese deve ser verdadeira, isto é, $\sqrt{2}$ é irracional.

Comentários:

Segundo Ávila (1984), essa é a prova que Aristóteles atribui aos pitagóricos quando da construção dos incomensuráveis. Mas, algumas obras colocam esse dado sob suspeita. Segundo Ávila (1984), o raciocínio empregado é muito sofisticado, e é mais provável que os pitagóricos tenham tido contato com a incomensurabilidade em um contexto geométrico.

2 – Suponha que $\sqrt{2}$ é racional. Sendo assim, podemos escrever $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e primos entre si. Daí, isso implica que $a^2 = 2b^2$. O expoente do número primo 2 aparece um número ímpar de vezes do lado direito e um número par de vezes do lado esquerdo da igualdade, o que contraria o Teorema Fundamental da Aritmética. Concluímos que nossa tese é verdadeira, isto é, $\sqrt{2}$ é irracional.

Comentários:

Trata-se de uma demonstração bastante simples, onde muito pouco precisa ser feito, pois faz uso de um resultado muito forte, que é o Teorema Fundamental da Aritmética, que diz o seguinte: todo número inteiro positivo maior do que 1 pode ser decomposto de maneira única como um produto de números primos. Como observa Rosa (2002), essa prova é mais adequada para o ensino médio, e, além disso, demanda um trabalho prévio com o Teorema Fundamental da Aritmética e com a decomposição em primos de números elevados ao quadrado. Rosa (2002) também aponta que essa demonstração pode facilmente ser utilizada para demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11},$ entre outras, e chegar até a generalização: *se N é um número natural que não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{N}$ é irracional* (p. 33). Também é possível demonstrar a irracionalidade de raízes como $\sqrt[3]{2}$.

3 – Suponha que $\sqrt{2}$ é racional. Sendo assim, podemos escrever $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e primos entre si. Daí, isso implica que $a^2 = 2b^2$. A partir dessa igualdade, podemos construir o número $\frac{2b-a}{a-b}$, cujo denominador é menor do que b e cujo quadrado é igual a 2. De fato, como $a = b\sqrt{2}$, temos:

i) $1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow b < b\sqrt{2} < 2b \Rightarrow b < a < 2b \Rightarrow 0 < a - b < b$.

ii) $\left(\frac{2b-a}{a-b}\right)^2 = \left(\frac{2b-b\sqrt{2}}{b\sqrt{2}-b}\right)^2 = \left(\frac{b(2-\sqrt{2})}{b(\sqrt{2}-1)}\right)^2 = \frac{4-4\sqrt{2}+2}{2-2\sqrt{2}+1} = 2$

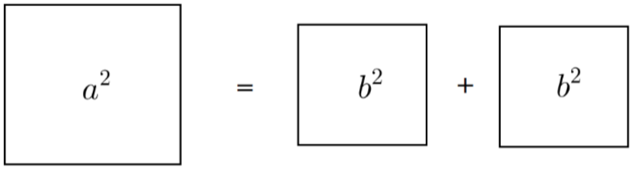
Podemos criar assim novos números com as mesmas propriedades, gerando uma sequência estritamente decrescente de números naturais (os denominadores), o que é um absurdo! Portanto, nossa tese deve ser verdadeira; isto é, $\sqrt{2}$ é irracional (ROSA, 2002).

Comentários:

Essa demonstração, também é recomendada para o ensino médio. Ela faz uso de uma ideia conhecida como Método da Descida Infinita de Fermat, que, por sua vez, usa o Princípio da Boa Ordenação – PBO. Esse último diz que todo subconjunto não vazio dos naturais possui um menor elemento. Quanto à Descida Infinita de Fermat, ela pode ser utilizada sempre que pretendemos mostrar que uma propriedade ou relação não se verifica para nenhum número natural. Para isso, basta provar que, se ela se verificasse para um dado número, seria também válida para um número menor, obtendo-se assim uma sucessão estritamente decrescente de números naturais, o que contradiz o PBO (ROSA, 2002).

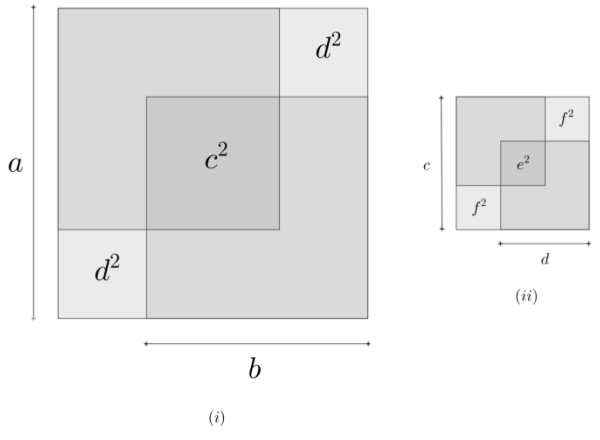
4 – Suponha que $\sqrt{2}$ é racional. Sendo assim, podemos escrever $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e primos entre si. Daí, isso implica que $a^2 = 2b^2$. Geometricamente, isso quer dizer que um quadrado de lado a pode ser decomposto em dois quadrados de lado b, sendo a e b números inteiros e primos entre si (ver Figura 21).

Figura 21 - Equivalência geométrica da equação $a^2 = 2b^2$



Observe que b deve ser maior do que a metade de a, pois, caso contrário, $2b^2 \leq a^2/2$ e o problema não teria solução. Sendo assim, podemos afirmar que existem quadrados de lados c e d conforme a Figura 22 - (i).

Figura 22 – Decomposição em quadrados



Fonte: Broetto (2016).

A partir daí, verifica-se que $a^2 = 2b^2 = 2b^2 + 2d^2 - c^2$, ou seja, $c^2 = 2d^2$. Conseguimos assim um quadrado com lado menor do que b, que pode ser decomposto em dois quadrados, repetindo a situação anterior, conforme ilustrado na Figura 22 – (ii).

Note que todos os lados dos quadrados envolvidos são números inteiros, pois foram obtidos a partir de operações elementares com números inteiros. Isso nos permite fazer todo o raciocínio novamente, obtendo uma sequência de lados inteiros de quadrados que seria infinita e estritamente decrescente, o que fere o PBO. Portanto, nossa tese deve ser verdadeira, isto é, $\sqrt{2}$ é irracional.

Comentários:

Essa prova que apresentamos foi uma adaptação de uma demonstração apresentada por Morais Filho (2015). Ela também se baseia no princípio da descida infinita de Fermat, como na demonstração anterior, diferenciando-se dessa por enveredar por argumentos e visualizações geométricos.

Uma demonstração 'direta'

1 – Elevar um número racional ao quadrado produz um outro número racional com características particulares.

Tomando um racional qualquer $\frac{m}{n}$, podemos escrever m e n como produto de números primos e cancelar os fatores comuns. Por isso, vamos supor logo de uma vez que m e n são primos entre si. Elevando $\frac{m}{n}$ ao quadrado, observa-se que m^2 tem os mesmos fatores primos que m, só que todos esses fatores estarão elevados ao quadrado. O mesmo ocorrerá em relação a n^2 e n. Por exemplo, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ e $60^2 = (2^2)^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Isso quer dizer que o quadrado de um número racional são frações cujo numerador e denominador apresentam ocorrências de números primos sempre aos pares. O número $2 = \frac{2}{1}$ não é um número desse tipo, já que os primos aparecem um número ímpar de vezes. Isso quer dizer que 2 não pode ser o quadrado de nenhum número racional. Como $\sqrt{2}$ é o número que ao quadrado é igual a 2, esse número não pode ser racional, portanto $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Comentários:

Essa prova foi proposta em Tall e Schwarzenberger (1978). Segundo essa obra, existe certa suspeição em relação a demonstrações por redução ao absurdo, mesmo entre alunos que cursam o terceiro ano de matemática. O que acontece, com o passar do tempo, é que os alunos entendem que o mundo da matemática aceita as demonstrações por redução ao absurdo, e isso abranda as desconfianças. Quando se trata de estudantes mais jovens, com pouca experiência em demonstrações matemáticas, não é justo esperar que eles aceitem uma demonstração por redução ao absurdo. O tipo de raciocínio requerido para entender esse tipo de demonstração está além das capacidades de muitos formadores do 6º ou 7º ano, isto é, de muitos professores de matemática, e de alguns estudantes universitários.

A demonstração aqui apresentada não é exatamente uma prova direta (por isso escrevemos 'direta'). Contudo, ela não apresenta a negação da tese logo no início, deixando-a para o final de forma disfarçada.

Apêndice B - Prova da irracionalidade de π

Suponha que π é racional. Logo, existem inteiros positivos a e b tais que $\pi = \frac{a}{b}$. Vamos definir uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{x^n \cdot (a-bx)^n}{n!}, n \text{ é um natural qualquer.}$$

Em seguida, estudaremos sete propriedades dessa função.

1.1) $f(0) = f(\pi) = 0$

De fato, basta fazer a substituição.

$$f(0) = \frac{0^n \cdot (a - b \cdot 0)^n}{n!} = 0$$

$$f(\pi) = \frac{\pi^n \cdot (a - b \cdot \pi)^n}{n!} = \frac{\pi^n \cdot (a - b \cdot \frac{a}{b})^n}{n!}$$
$$= \frac{\pi^n \cdot (a - a)^n}{n!} = 0$$

1.2) $f(x) > 0$ quando $x \in (0, \pi)$

Como $x > 0$, então $x^n > 0$. Resta mostrar apenas que $(a - bx)^n > 0$.

De fato, $x \in (0, \pi)$ implica que $0 < x < \frac{a}{b}$, isto é, $0 < bx < a$. Daí, temos $a - bx > 0$ e, consequentemente, $(a - bx)^n > 0$.

1.3) $0 < f(x) \cdot sen(x) < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!}$ quando $x \in (0, \pi)$

$x \in (0, \pi)$ implica:

i) $0 < x < \pi \Rightarrow 0 < x^n < \pi^n$

ii) $bx > 0 \Rightarrow a - bx < a \Rightarrow (a - bx)^n < a^n$

iii) $0 < sen(x) < 1$

Portanto, temos $f(x) \cdot sen(x) = \frac{x^n \cdot (a-bx)^n}{n!} < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} \cdot 1$. Pela propriedade 1.2, podemos concluir que $0 < f(x) \cdot sen(x) < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!}$.

1.4) $f(\pi - x) = f(x)$ para todo x.

De fato,

$$f(\pi - x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \cdot \left(a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n}{n!}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \cdot (a - a + bx)^n}{n!} = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \cdot b^n x^n}{n!}$$

$$\frac{\left[\left(\frac{a}{b} - x\right) \cdot b\right]^n x^n}{n!} = \frac{(a - bx)^n x^n}{n!} = f(x)$$

1.5) $f^{(i)}(0)$ é sempre um número inteiro ($f^{(i)}$ é derivada de f de ordem i)

Pelo desenvolvimento binomial,

$$f(x) = \frac{x^n}{n!}\left[\binom{n}{0} a^n \cdot (-bx)^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot (-bx) + \cdots \right.$$
$$\left. + \binom{n}{n} a^0 \cdot (-bx)^n \right]$$

$$= \frac{x^n}{n!}[a^n - na^{n-1}bx + \cdots - (-b)^n x^n]$$

$$= \frac{a^n x^n}{n!} - \frac{na^{n-1}bx^{n+1}}{n!} + \cdots + \frac{(-b)^n x^{2n}}{n!}$$

Como cada termo tem grau máximo $2n$, quando $i > 2n$ teremos $f^{(i)}(x) = 0$ para todo x, em particular para $x = 0$. Como nenhum termo tem grau menor do que n, quando $i < n$ teremos pelo menos um fator x em cada termo de $f^{(i)}(x)$. Logo, $f^{(i)}(0) = 0$. Resta verificar o caso $n \leq i \leq 2n$.

Observe que cada monômio da expansão de $f(x)$ obtida acima é do tipo $\frac{kx^{n+j}}{n!}$, onde k é uma constante e $0 \leq j \leq n$. Tomando $n \leq i \leq 2n$, teremos alguns termos de $f(x)$ com grau menor do que i, alguns termos com grau maior do que i e um único termo com grau igual i. Como a derivada da soma é a soma das derivadas, $f^{(i)}(x)$ é obtida a partir da soma das derivadas de cada termo. Nos termos em que $n + j < i$, a derivada será nula para todo

x, em particular para $x = 0$. Nos termos em que $n + j > i$, teremos ao menos um fator x, o que já garante derivada nula quando $x = 0$. No termo em que $n + j = i$, teremos

$$f^{n+j}(x) = \frac{k}{n!}(n+j)(n+j-1)(n+j-2)\ldots\cdot 2\cdot 1$$

$$= \frac{(n+j)!\,k}{n!} = \frac{n!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+j)k}{n!}$$

$$= (n+1)(n+2)\ldots(n+j)k$$

Trata-se de um número inteiro.

1.6) $\quad f^{(i)}(x) = (-1)^i f^{(i)}(\pi - x)$

Pela propriedade 1.4, $f(\pi - x) = f(x)$. Derivando uma vez, teremos

$$f'(\pi - x)\frac{d}{dx}(\pi - x) = f'(x)$$

$$-f'(\pi - x) = f'(x)$$

Derivando a segunda vez, teremos

$$-f''(\pi - x)\frac{d}{dx}(\pi - x) = f''(x)$$

$$f''(\pi - x) = f''(x)$$

Uma demonstração rigorosa deveria usar o Princípio da Indução Infinita nesse ponto. Não o faremos por dois motivos: simplificaremos o tanto quanto possível a demonstração, e entendemos que já está suficientemente claro que, ao continuar o processo de derivação, teremos garantida a igualdade $f^{(i)}(x) = (-1)^i f^{(i)}(\pi - x)$.

1.7) $f^{(i)}(\pi)$ é sempre um número inteiro

Pela propriedade 1.6 temos $f^{(i)}(\pi) = (-1)^i f^{(i)}(0)$. Pela propriedade 1.5, $f^{(i)}(0)$ é sempre um número inteiro, portanto $f^{(i)}(\pi)$ também o será.

Tendo estudado a função f, definiremos agora outra função. Seja $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

Passaremos, a seguir, a estudar cinco propriedades dessa função.

2.1) $f(x) = F''(x) + F(x)$

De fato, basta desenvolver o lado direito da igualdade.

$$\begin{array}{rl} & F''(x) = f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \cdots \\ + & F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \cdots \\ \hline & f(x) \end{array}$$

2.2) $F'(x)sen(x) - F(x)\cos(x)$ é uma primitiva de $f(x)sen(x)$.

De fato, basta derivar.

$$\frac{d}{dx}[F'(x)sen(x) - F(x)\cos(x)] =$$

$$= F''(x)sen(x) + F'(x)\cos(x) - F'(x)\cos(x) + F(x)sen(x)$$

$$= \big(F''(x) + F(x)\big)sen(x)$$

$$= f(x)sen(x)$$

2.3) $F(0) + F(\pi)$ é um número inteiro

$F(0) = f(0) - f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(0) = 0 - f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(0)$ é um número inteiro pela propriedade 1.5.

$F(\pi) = f(\pi) - f^{(2)}(\pi) + f^{(4)}(\pi) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(\pi) = 0 - f^{(2)}(\pi) + f^{(4)}(\pi) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(\pi)$ também é um número inteiro pela propriedade 1.5.

Logo, $F(0) + F(\pi)$ é um número inteiro.

2.4) $\int_0^\pi f(x)sen(x)dx$ é um número inteiro.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pela propriedade 2.2,

$$\int_0^\pi f(x)sen(x)dx = [F'(x)sen(x) - F(x)\cos(x)]\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}$$

$$= F'(\pi)sen(\pi) - F(\pi)\cos(\pi) - F'(0)sen(0) + F(0)\cos(0)$$

$$= F(0) + F(\pi),$$

que é inteiro pela propriedade 2.3.

2.5) Se $x \in (0,\pi)$, então $0 < \int_0^\pi f(x)sen(x)dx < \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$

Da propriedade 1.3 temos $0 < f(x) \cdot sen(x) < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!}$. Pela continuidade das funções envolvidas, podemos afirmar que

$$0 < \int_0^\pi f(x) \cdot sen(x)\, dx < \int_0^\pi \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} dx$$

Daí, calculando uma integral, temos

$$0 < \int_0^\pi f(x) \cdot sen(x)\, dx < \left[\frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} x\right]_0^\pi$$

$$0 < \int_0^\pi f(x) \cdot sen(x)\, dx < \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$$

Para finalizar a demonstração, precisamos avaliar o comportamento de $\frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$.

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!} = 0$, existe n_0 tal que $\frac{\pi^{n_0+1} a^{n_0}}{n_0!} < 1$. Sendo assim, tomando $n = n_0$ temos

$$0 < \int_0^\pi f(x) sen(x) dx < 1$$

Ou seja, temos um número inteiro no intervalo (0,1). Como a única suposição foi que π era um número racional, somos forçados a considerá-la falsa. Portanto, π é irracional.

Notas finais:

i) A demonstração que apresentamos é baseada em uma demonstração dada pelo blog *Manthano* (MANTHANO, 2012), que, por sua vez, é o esmiuçamento de uma demonstração apresentada em apenas uma página por Niven (1947).

ii) Alguns detalhes ainda ficaram sem uma justificativa formal. Fizemos isso de forma deliberada com a intenção de tornar a demonstração o mais direta e o menos enfadonha possível.

iii) Em nenhum momento usou-se o significado de π como razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro. O significado usado foi o de primeiro número real positivo que anula a função $sen(x)$.

Apêndice C - Prova de que e^{π} é transcendente.

Utilizaremos um resultado conhecido como teorema de Gelfond-Schneider, que diz o seguinte:

Sejam α e β números algébricos (reais ou complexos). Se $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ e β não for um número racional (real), então α^{β} é transcendente (FIGUEIREDO, 2011, p. 55).

Para mostrar que e^{π} é transcendente a partir do resultado de Gelfond-Schneider, precisamos mostrar que e^{π} satisfaz as condições desse teorema. Mostraremos que isso de fato ocorre, e que $e^{\pi} = i^{-2i}$. Porém, como isso envolve alguns conhecimentos acerca de números complexos, teremos que enveredar por alguns conceitos básicos dessa seara.

Um **número complexo** pode ser definido como um par ordenado (x, y) de números reais que satisfaz às seguintes propriedades:

i) $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.

ii) $(a, b) + (c, d) \Leftrightarrow (a + c, b + d)$

iii) $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Todo número escrito da forma $(a, 0)$ é equivalente ao número real a. Para os números da forma $(0, b)$, no entanto, é diferente. O número complexo (0,1) é chamado de **unidade imaginária**, e denotado por i. Dessa forma, temos

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1.$$

Observe também que

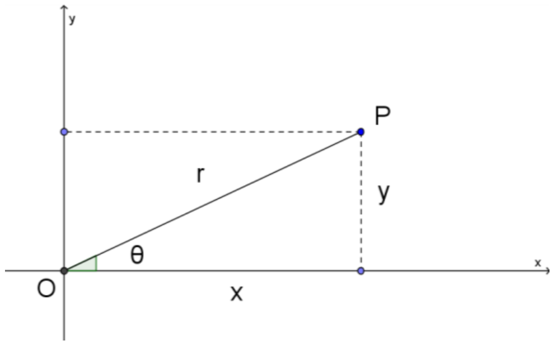
$$ib = (0,1) \cdot (b, 0) = (0 \cdot b - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot b) = (0, b).$$

Isso quer dizer que podemos escrever qualquer número complexo da seguinte forma:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

Essa é a chamada **fórmula algébrica** do número complexo. Chamamos x de *parte real* e y de *parte imaginária*. Se representamos o número complexo $z = (x, y)$ no plano cartesiano, com a convenção de marcar sobre os eixos Ox e Oy as partes real e imaginária, respectivamente, cada número complexo $z = (x, y)$ corresponderá a um único ponto P do plano cartesiano (Figura 23).

Figura 23 - Representação de um número complexo no plano cartesiano



Definindo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e θ como o ângulo formado entre o eixo Ox e o segmento OP (ver Figura 23), podemos escrever $z = x + iy$ como

$$z = r(cos\theta + isen\theta),$$

que é chamada de **forma trigonométrica** do número complexo. Essa fórmula é muito útil para trabalhar com potenciação e radiciação de números complexos. Tendo discutido o básico, vamos dar um salto para chegar logo ao ponto que nos interessa aqui. Para o leitor que quiser aprender ou relembrar todas as questões elementares relacionadas ao assunto, recomendamos a leitura de Iezzi (2005). Para noções avançadas, porém, indicamos Ávila (2000).

Pode-se demonstrar, em um curso avançado de Variáveis Complexas, que

$$e^{ix} = cosx + isenx \ ,$$

conhecida como **fórmula de Eüler**. A expressão $e^{i\pi} + 1 = 0$ torna-se um caso particular dessa fórmula. Para mostrar que $i^{-2i} = e^{\pi}$, precisamos ainda definir as funções exponencial e logarítmica de um número complexo. Começaremos pela função exponencial, que pela fórmula de Eüler, nos dá

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x}(cosy + iseny).$$

Para definir o logaritmo, fazemos primeiro $w = lnz = u + iv$. Como a função exponencial deve ser o inverso do logaritmo, temos $z = e^{w}$. Fazendo $z = r(cos\theta + isen\theta)$, teremos a seguinte igualdade

$$r(cos\theta + isen\theta) = e^{u}(cosv + isenv).$$

Daí, tiramos que $r = e^{u}$ e $\theta = v + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Resolvendo as equações acima para u e v, teremos $u = lnr$ e $v = \theta + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Logo, $lnz = lnr + i(\theta + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Daí, $\quad lni = ln1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2}\right)$ para $k = 0$.

Em um primeiro curso de cálculo diferencial e integral, em geral, define-se o significado de um número real a elevado a uma potência real x fazendo-se $a^x = e^{xlna}$. Essa ideia pode ser estendida para os números complexos de forma análoga. Sendo assim,

$$i^{-2i} = e^{-2i\,lni} = e^{-2i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\pi}.$$

Apêndice D – Limite fundamental exponencial

Queremos mostrar que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

De fato, chamando $u = 1/x$, teremos $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u\to 0^+}(1+u)^{1/u}$.

Chamando $y = (1+u)^{1/u}$ e aplicando o logaritmo teremos $\ln y = \ln(1+u)^{1/u} = \frac{1}{u}\cdot\ln(1+u)$.

Calculando o limite de $\ln y$, teremos

$$\lim_{u\to 0^+}\ln y = \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1}{u}\cdot\ln(1+u)\right)$$

$$\underbrace{=}_{Regra\ de\ L'Hôpital} \lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+u}}{1} = 1$$

A partir da igualdade $\lim_{u\to 0^+} \ln y = 1$, aplicamos a exponencial e obtemos $\lim_{u\to 0^+} e^{\ln y} = e^1$, ou seja, $\lim_{u\to 0^+} y = e$. Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Apêndice E – Um número é racional se, e somente se, sua representação decimal é finita ou infinita periódica

Uma expressão decimal é um símbolo da forma $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ onde a_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e $a_1, a_2, \ldots a_n$ são dígitos, isto é, números inteiros que podem assumir valores entre 0 e 9. A expressão decimal α representa o número real

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

Porém, é preciso explicar o significado da igualdade acima, principalmente no que se refere às reticências. Elas significam que o número real α tem valores aproximados pelos números racionais

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \frac{a_n}{10^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Quando se substitui α por α_n, comete-se um erro que não é superior a $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$. Assim, a_0 é o maior número natural contido em α, a_1 é o maior dígito tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha$, a_2 é o maior dígito tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} \leq \alpha$, e assim por diante. Tem-se assim uma sequência não decrescente de números racionais $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \alpha_n \leq \cdots$ que são valores cada vez mais próximos do número real α. Mais precisamente falando, $0 \leq \alpha - \alpha_n \leq 10^{-n}$, para cada $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ (LIMA *et al.*, 1996).

Há algumas situações particulares que devemos comentar. A primeira é quando, a partir de um certo dígito, todos se tornam iguais a zero. Nesse caso, $\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \frac{a_n}{10^n}$ é um número racional. De maneira mais geral, mesmo que não termine em zeros, uma expressão decimal pode representar um número racional, desde que seja uma dízima periódica. Uma expressão decimal $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ chama-se dízima periódica simples de período $a_1 a_2 \ldots a_n$ quando os primeiros p dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem. Para mostrar que toda dízima periódica simples representa um número racional, começamos com uma afirmação particularmente intrigante para muitos alunos:

$$\alpha = 0{,}999\ldots = 1\ .$$

De fato, os valores aproximados de α são $\alpha_1 = 0{,}9, \alpha_2 = 0{,}99$, $\alpha_3 = 0{,}999$, etc. Daí, temos $1 - \alpha_1 = 0{,}1$, $1 - \alpha_2 = 0{,}01$, $1 - \alpha_3 = 0{,}001$, e, mais geralmente, $1 - \alpha_n = 10^{-n}$. Sendo assim, tomando n suficientemente grande, a diferença $1 - \alpha_n$ pode se tornar tão pequena quanto se deseje, o que significa que os números racionais $\alpha_n = 0{,}999\ldots 9$ são valores cada vez mais próximos de 1.

Uma vez que

$$0{,}999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots \frac{9_n}{10^n} + \cdots = 1,$$

resulta imediatamente que

$$0{,}111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots \frac{1}{10^n} + \cdots = \frac{1}{9}\,.$$

A partir daí toda dízima com um dígito na parte periódica é um número racional.

$$0, aaa\ldots = \frac{a}{10} + \frac{a}{10^2} + \cdots \frac{a}{10^n} + \cdots = \frac{a}{9}\,.$$

Para as dízimas com dois dígitos na parte periódica, é preciso antes observar que

$$
\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2}\right) + \left(\frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4}\right) + \cdots \\
&= \frac{99}{100} + \frac{99}{100^2} + \cdots \\
&= 99\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \cdots\right),
\end{aligned}
$$

e, daí,

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \cdots = \frac{1}{99}.$$

Ou seja,

$$0,ababab \ldots = ab\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \cdots\right) = \frac{ab}{99}.$$

Prosseguindo com esse raciocínio para dízimas com três, quatro, ou mais dígitos na parte periódica, podemos dizer que toda dízima periódica simples representa um número racional, que também é chamada de fração geratriz da dízima periódica. Também podemos transformar esse raciocínio em uma conhecida regra: *a geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período* (LIMA *et al.*, 1996, p. 63).

Existem ainda as dízimas periódicas compostas, aquelas em que existe uma parte após a vírgula que não se repete, como $1{,}4373737\ldots$ Nesses casos, basta fazer o seguinte:

$$\alpha = 1{,}4373737\ldots$$

$$10\alpha = 14{,}373737\ldots = 14 + 0{,}373737\ldots$$

Agora, basta usar a regra anterior para a dízima periódica simples.

$$10\alpha = 14 + \frac{37}{99} = \frac{14 \cdot 99 + 37}{99} = \frac{14(100-1)+37}{99}$$
$$= \frac{1437 - 14}{99}$$

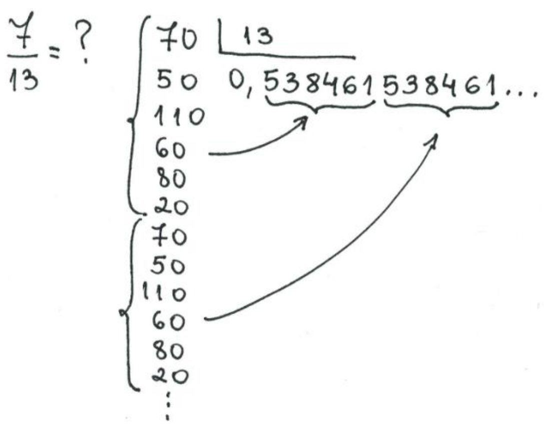
A fração geratriz de α será

$$\alpha = \frac{1437 - 14}{990}.$$

Esse procedimento nos remete a outra regra bastante conhecida: *a geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é a parte inteira acrescida da parte não-periódica e de um período, menos a parte não-periódica, e cujo denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não-periódica* (LIMA *et al.*, 1996, p. 64).

Em suma, mostramos que uma dízima periódica, simples ou composta, representa um número racional. A recíproca, isto é, que todo número racional m/n representa uma dízima periódica, pode ser mostrada por meio da divisão continuada. Ao dividir m por n, só podem ocorrer os restos $0, 1, 2, \ldots n-1$. Isso significa que, após um máximo de n divisões, um dos restos vai se repetir, e, a partir daí os dígitos reaparecerão no quociente na mesma ordem. Logo, surgirá uma dízima periódica (Figura 24).

Figura 24 - Relação entre os restos e a dízima periódica



Fonte: Broetto (2016).

Apêndice F – Propostas alternativas de ensino

Se concordamos que os números irracionais são importantes e devem ser ensinados na escola básica, uma questão surge imediatamente: como ensiná-los? Quais pontos aprofundar? Buscamos aqui apresentar alternativas ao que comumente é proposto nos livros didáticos. Devido à natureza diversificada das propostas apresentadas, os níveis de aprofundamento são variados. Algumas dessas propostas também podem ser chamadas de princípios ou diretrizes. Salientamos ainda que este apêndice tem um caráter informativo, pois seria impossível apresentar muitos detalhes em um curto espaço. Para aprofundar alguma proposta, o leitor poderá consultar as fontes citadas.

Começamos com Klein (1932) e sua proposta de tratar os numeros irracionais a partir apenas de exemplos.

> Deixe-me dizer, em poucas palavras, como eu lido com essa matéria nas escolas. Uma teoria exata dos números irracionais é dificilmente adaptável para o interesse e o poder de compreensão da maioria dos pupilos. O pupilo usualmente ficará contente com resultados de exatidão limitada. Ele ficará admirado com uma aproximação de 1/1000 mm e não exigirá uma exatidão ilimitada. Para a

> maioria dos pupilos será suficiente se o número irracional for entendido em termos gerais por meio de exemplos, e isso é o que usualmente é feito. Com certeza, estudantes especialmente dotados exigirão uma explanação mais completa do que essa, e será um exercício louvável de habilidades pedagógicas por parte do professor dar a esses estudantes a explanação suplementar desejada sem sacrificar os interesses da maioria (p. 37).

Para Klein (1932), a opção pelos exemplos não é exatamente uma escolha. Ela talvez seria a única opção já que uma teoria rigorosa dos irracionais é inadequada na escola básica, porque está além do interesse e das possibilidades de compreensão dos alunos. Assim como Klein (1932), também observamos que a opção quase que exclusiva pelos exemplos é o que de fato ocorre na escola, mais precisamente no ensino fundamental. Talvez seja apresentada uma definição, muito brevemente e sem maiores discussões e tempo para os alunos assimilarem todas as suas nuances, mas rapidamente os exemplos entram em cena e isso é tudo de números irracionais que os alunos verão. Essa é uma abordagem comum de ser encontrada nos livros didáticos do 8º ou 9º anos do ensino fundamental.

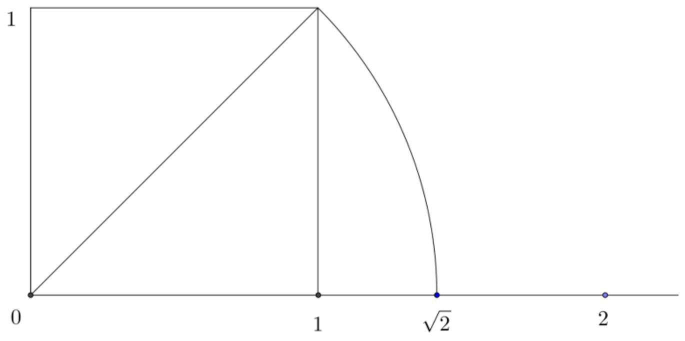
Além de apresentar poucos exemplos de números irracionais, esse tipo de abordagem – comum em aulas e livros didáticos de matemática – também costuma negligenciar a importância dos contraexemplos. Pensamos que devem ser apresentados diversos exemplos e suas propriedades, para que os alunos assimilem o porquê daqueles casos serem considerados números irracionais. Da mesma forma, diversos contraexemplos devem ser apresentados e discutidos para que os alunos entendam por que aquele número não satisfaz certas condições e propriedades necessárias para ser considerado um número irracional.

As propostas de ensino dos números irracionais que apresentaremos a seguir são um contraponto às ideias de Klein (1932), na medida em que vão além dos exemplos. A nosso ver, essas propostas encontram-se em um ponto de equilíbrio entre dois extremos apontados por Klein (1932): uma teoria rigorosa de números irracionais e a apresentação exclusiva de exemplos. Entendemos que não é salutar à aprendizagem da matemática abrir mão da abordagem de algum conceito quando não é possível tratá-lo com o máximo rigor, inclusive porque o rigor matemático não é algo absoluto, ele carrega a marca de seu tempo. A própria história nos dá vários exemplos disso. Um deles é o cálculo diferencial e integral, que se desenvolveu no século XVII, mostrando toda a sua força e eficácia na resolução de diversos problemas de mecânica, ótica e termodinâmica, entre outros, mas teve suas bases matemáticas consideradas não rigorosas no século XIX. Veremos a seguir que, mesmo em um nível elementar, é possível abordar algumas questões relacionadas aos números irracionais em profundidade, sem que para isso seja necessário construir uma teoria matemática rigorosa.

No trabalho de Mosca (2013), são propostas três maneiras para definir os números irracionais no ensino médio. A primeira maneira é dizer que um número é irracional quando representa a medida de um segmento incomensurável com a unidade. Antes, o número racional deve ser definido como aquele que representa a medida de um segmento comensurável com a unidade. Essa definição mostra que a irracionalidade é algo relativo, que reside na relação entre os elementos, e não nos elementos em si. Se, por exemplo, definíssemos $\sqrt{2}$ como unidade, 1 seria um número irracional. Na verdade, todos os naturais e racionais se tornariam números irracionais. Essa proposta precisa de um trabalho prévio com a medida de segmentos para os estudantes se familiarizarem com os procedimentos de medida.

A segunda maneira é definir os números racionais como aqueles que podem ser escritos em forma de fração a/b com $b \neq 0$. O objetivo é definir os irracionais, ao final do processo, como números reais que **não** podem ser escritos em forma de fração a/b com $b \neq 0$. Antes, porém, é preciso definir os números reais. A proposta de Mosca (2013) é pegar uma reta, marcar um ponto, chamá-lo de origem, definir um segmento como unidade e marcar, a partir dessa unidade, os números racionais. Em seguida, mostrar que existe um ponto que representa um número irracional (Figura 25). Os números reais são definidos assim: *o conjunto $\mathbb{R}$, denominado conjunto dos números reais é o conjunto que contém o conjunto dos números racionais, e dado um número irracional **a**, contém todos os números gerados por este a partir das quatro operações aritméticas* (p. 32). Segundo Mosca (2013), a intenção dessa definição é criar um conjunto fechado para as quatro operações e que possa ser utilizado na definição de número irracional, evitando-se ou minimizando-se uma circularidade lógica.

Figura 25 - Construção de um ponto que representa um número irracional



Fonte: Broetto (2016).

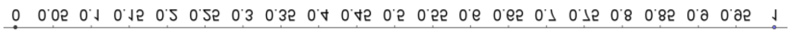
Na terceira maneira proposta por Mosca (2013), define-se primeiramente uma expansão decimal: um símbolo da forma $n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots.,$ onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, a_3 \dots a_n \dots$ são números positivos chamados dígitos, tal que cada a_i pertence ao conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. A partir daí, define-se número real como aquele que pode ser expresso por meio de uma expansão decimal. Mostra-se em seguida que toda fração ordinária é equivalente a uma expressão decimal finita ou a uma dízima periódica. Define-se a partir daí que um número real é um número racional se sua representação for finita ou infinita periódica. Por fim, o número irracional é definido como o número real cuja representação decimal é infinita e não-periódica.

Mendes (2012) apresenta uma pesquisa de natureza qualitativa, desenvolvida em uma escola de formação de professores para a educação básica, da rede pública estadual do Rio de Janeiro. Constitui-se em uma investigação de práticas pedagógicas para o ensino dos números irracionais, com o objetivo de fornecer material para auxiliar professores das séries iniciais em suas práticas e estimular a reflexão sobre a importância de uma boa formação desse conceito. Mendes (2012) propõe refletir acerca de diferentes práticas pedagógicas passíveis de serem aplicadas em sala de aula via sequências de atividades didáticas, com ou sem o auxílio do *software* GeoGebra, como a percepção do infinito, o número de ouro, a percepção de segmentos comensuráveis e incomensuráveis, a localização de irracionais na reta, entre outras.

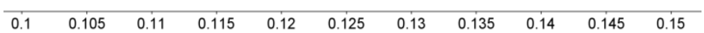
Garcia, Soares e Fronza (2005) propõem uma série de atividades para o 9º ano do ensino fundamental que giram em torno da reta real. De forma resumida, apresentamos a atividade proposta para a construção da reta real (as ilustrações são nossas):

1 – Traçar uma linha horizontal e marcar o 0 (zero) e o 1 (um). Usando a mesma distância entre 0 e 1, marcar o 2, 3, 4, 5, ... Fazer uma reflexão e marcar -1, -2, -3, ...

2 – Ampliar o intervalo entre 0 e 1, tomando toda a folha, dividir em dez partes iguais e marcar os pontos 0,1; 0,2; ...; 0,9. Em seguida marcar os pontos médios 0,05; 0,15; 0,25; ...; 0,95.

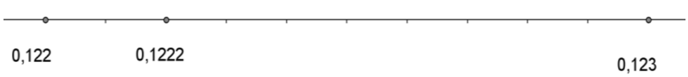


3 – Ampliar o intervalo entre 0,1 e 0,15, tomando toda a folha, dividir em dez partes iguais e marcar os pontos 0,105; 0,110; 0,115; ...; 0,145.



4 – Ampliar o intervalo entre 0,12 e 0,125, tomando toda a folha, dividir em dez partes iguais e marcar 0,122.

5 – Ampliar o intervalo entre 0,122 e 0,123, tomando toda a folha, dividir em dez partes iguais e marcar 0,1222.



Os pontos que aparecem correspondem a números decimais exatos, aqueles que têm um número finito de casas decimais. Se pudéssemos continuar essas divisões, poderíamos marcar na reta o número infinito e periódico 0,1222..., da mesma forma que poderíamos marcar um número infinito e não periódico como 0,121121112...A conclusão da atividade é que:

> A cada nova divisão da reta os números ganham mais um dígito. Pode-se ampliar e dividir os intervalos infinitas vezes. Assim podemos marcar pontos da reta que correspondem a números decimais com número infinito de casas após a vírgula. Para cada ponto da reta vai existir um número decimal finito ou infinito, correspondente. A estes números chamamos de números reais. O conjunto dos números reais é o conjunto dos números que têm correspondência nos pontos da reta. Estes números têm representação decimal, finita ou infinita (GARCIA; SOARES; FRONZA, 2005, p. 32).

Andersen (1968) apresenta uma proposta *não tradicional* para introduzir os números irracionais no ensino médio, em contraposição a uma abordagem muito comum de iniciar o assunto escrevendo na lousa $x^2 = 2$ e desafiar os alunos a encontrar a solução. Segundo Andersen (1968), muitos professores que começam dessa forma acabam eles mesmos tendo que dar a solução para os alunos e depois convencê-los que a solução é um número que não pertence ao conjunto dos racionais. A razão disso deve-se ao fato de que *o referido método não é natural, na medida em que depende muito pouco da experiência dos alunos e depende pesadamente de uma definição não construtível, assim como de uma prova indireta* (ANDERSEN, 1968, p. 272).

Antes de prosseguir com a ideia de Andersen (1968) para a introdução do assunto números irracionais, cabe aqui apontar o nosso entendimento a respeito dessas colocações do autor. Em primeiro lugar, a frase *depende pesadamente de uma definição não construtível e de uma prova indireta* provavelmente se refere à definição de $\sqrt{2}$ como solução de $x^2 = 2$ e da prova mais comum da irracionalidade de $\sqrt{2}$, que é na verdade uma prova de que esse número não é racional, portanto uma prova indireta por *redução ao absurdo*[50]. Em segundo lugar, 'depende muito pouco da experiência dos alunos' provavelmente se refere a encontrar um número racional que ao quadrado é igual a 2.

Prosseguindo, a ideia central de Andersen (1968) é mostrar que existem outros números no intervalo $[0,1]$

[50] O nome provém do latim *reductio ad absurdum* e está baseado na lei do terceiro excluído, segundo a qual uma afirmação que não pode ser falsa deverá ser verdadeira (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010).

além dos números racionais. Para levar a efeito tal proposta, sugere discutir alguns processos que levam a somas infinitas como

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

para, em seguida, obter $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots<\frac{1}{2}$. O passo seguinte é construir uma relação biunívoca entre o conjunto $A=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\dots,\frac{1}{2}^{(k+1)},\dots\right\},k\in\mathbb{N}$, e o conjunto de todos os números racionais (inclusive com algumas repetições) no intervalo [0,1], chamado de $B=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\dots\right\}$. Assim, pensando os elementos do conjunto A como comprimentos de segmentos, o procedimento acima mostra que o intervalo [0,1] fica *descoberto* quando relacionamos biunivocamente cada um desses segmentos com um número racional de B. Logo, é natural que exista algo além dos racionais, que serão chamados de irracionais[51].

---

[51] Analisando historicamente como se deu a formalização dos números reais, não achamos que seja natural. Na verdade, se alimentarmos o

Uma vez firmemente estabelecido que existem números que não são racionais, Andersen (1968) afirma que o estudante está pronto para a tarefa de encontrar um exemplo particular, e isso poderá ser feito pela discussão já citada em relação à solução da equação $x^2 = 2$ ou pela localização de $\sqrt{2}$ na reta numérica por meio de uma construção geométrica. A etapa seguinte será a propagação dos números irracionais, isto é, a construção de outros números irracionais além de $\sqrt{2}$, como $\frac{a}{b}\sqrt{2}$, onde a e b são números inteiros. Andersen (1968) também aponta que naturalmente os alunos suspeitarão da irracionalidade de $\sqrt{3}$, e que isso poderá ser uma interessante e desafiadora lição de casa.

Por fim, Andersen (1968) aponta para outras discussões frutíferas que poderão surgir, como: os racionais e os irracionais têm a mesma quantidade de elementos? Os irracionais preenchem todas as lacunas deixadas na reta numérica pelos racionais? A solução para $x^2 = -1$ pertence aos irracionais? Qual o lugar de π no nosso sistema numérico?

---

desejo de que todos os pontos do intervalo [0,1] correspondam a um número, deve existir algum outro tipo de número para preencher as lacunas que criamos com esse desejo. Esse desejo foi naturalizado.

Apesar da proposta de Andersen (1968) ser direcionada ao ensino médio, consideramos que também seria muito interessante utilizá-la em um curso de licenciatura em matemática, em uma disciplina de introdução à análise real, quando os alunos já tiveram a oportunidade de estudar séries infinitas e correspondência biunívoca em outras disciplinas, como cálculo diferencial e integral, álgebra ou teoria dos números. Entendemos ainda que para aplicar a proposta de Andersen (1968) em uma turma de ensino médio brasileira seria preciso trabalhar antes com processos infinitos por algumas semanas, talvez meses. De acordo com esse autor, discussões de fatos matemáticos como uma soma infinita que resulta em um valor finito podem proporcionar acaloradas discussões, mas, não costumam estar presentes na sala de aula nesse nível de ensino.

Silva (2006) propõe uma abordagem metodológica sobre números irracionais para o ensino médio. A proposta foi construída e aplicada em duas turmas de 1ª série do ensino médio de escolas públicas da cidade de Natal após uma fase inicial de diagnóstico. As atividades foram desenvolvidas em pequenos grupos, seguindo os procedimentos: i) leitura individual e silenciosa; ii) discussão sobre como resolver a atividade proposta; iii) resolução da atividade (uso de materiais, procedimentos de cálculos, anotações e outros); iv) comunicação das ideias e dos procedimentos adotados na resolução; v) quando necessário, intervenção do professor-pesquisador para esclarecimentos.

A seguir, listamos a sequência de atividades, bem como os tópicos principais de cada atividade proposta para uma das turmas participantes da pesquisa de Silva (2006).

1 - Identificação de um número primo. Decomposição de um número em fatores primos.

2 – Equação do 1º grau.

3 – Razão, proporção e proporcionalidade.

4 – Representação dos números irracionais utilizando régua e compasso.

5 – Radicais e operações com radicais.

6 – Semelhança de figuras.

7 – Procedimentos para calcular a raiz quadrada por aproximação.

8 – Demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

9 – Equações irracionais.

10 – Breve revisão de trigonometria. Polígonos regulares inscritos e circunscritos. Método de Arquimedes para aproximação do valor de π.

Silva (2006) concluiu, diante dos resultados positivos alcançados, que a abordagem desenvolvida tem condições de ser aplicada de forma mais frequente no ensino médio.

Arcavi (1985) apresenta diversas propostas de atividades para o ensino de números irracionais utilizando história da matemática. As atividades são direcionadas a professores em formação e professores que já atuam na educação básica. Os principais objetivos dessa proposta, materializada em uma sequência de fichas de trabalho, são: i) aumentar o conhecimento matemático do professor sobre tópicos do currículo, de uma forma que motive o professor a reconsiderar tópicos previamente estudados, mas possivelmente entendidos imperfeitamente; ii) propiciar discussões de práticas relevantes; e iii) criar uma imagem razoável da atividade matemática como esforço humano. Outro ponto que merece destaque é a utilização, sempre que disponível, de fontes primárias.

Todas as fichas de trabalho têm a seguinte estrutura: uma breve introdução biográfico-cronológica para situar a cena histórica; uma fonte histórica (tanto quanto possível uma fonte primária); por fim, questões principais da fonte matemática e das consequências matemáticas e didáticas. A dinâmica do processo é a seguinte: após receberem a ficha de trabalho com um tema em destaque, os participantes realizam a atividade proposta, em grupos ou individualmente, com a intervenção de um tutor se necessário. Uma discussão coletiva e guiada é iniciada e, por fim, distribuem-se as folhas de respostas da atividade. Os seis temas propostos vão desde os primeiros registros dos números irracionais até sua formalização no século XIX: 1 – os pitagóricos; 2 – Euclides e os Elementos; 3 – Irracionais nos séculos XVI e XVII; 4 – Rafael Bombelli; 5 – Nicholas Saunderson; 6 – Dedekind e a definição dos irracionais.

Melo (1999) também propôs atividades para abordar o número irracional envolvendo a história da matemática. São sete conjuntos de atividades, fruto de pesquisas bibliográficas, cuja contribuição à educação matemática reside no fato de estarem agrupadas por temas, que são os seguintes: existência dos irracionais, diversas formas de representação, representação na reta, a questão da densidade, irracionalidades trigonométricas, irracionalidades logarítmicas, irracionais algébricos e transcendentes.

Em mais uma proposta de ensino utilizando elementos da história da matemática, Dias e Cobianchi (2004) propõem uma abordagem dos números reais que guardam uma relação direta com a questão dos irracionais. Essa abordagem está apoiada em uma perspectiva lógico-histórica, e, em linhas gerais, parte do pressuposto que a reconstrução histórica do movimento de ideias relacionadas a um determinado conceito favorece a apreensão lógica do objeto. Nesse contexto, os pesquisadores sugerem que sejam abordados os seguintes conceitos: infinidade, ordenação, densidade, enumerabilidade, continuidade e incomensurabilidade.

Baroni e Nascimento (2005) sugerem a ideia de se introduzir os números reais, em cursos de formação de professores, a partir da medição de segmentos. A proposta apresentada nasceu de discussões entre os autores dessa obra e alunos do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Unesp – Rio Claro, e foi posta em prática em uma disciplina de análise real ministrada para alunos de mestrado e doutorado em educação matemática no ano de 2004. Segundo Baroni e Nascimento (2005), a intenção não foi esgotar o assunto nem apresentar algo novo, já que a proposta se baseia em uma sugestão do matemático francês Henri Lebesgue (1875 – 1941).

A proposta se inicia com o tratamento de segmentos proporcionais, que inclui uma abordagem dos segmentos comensuráveis. Em seguida, mostra-se que existem segmentos incomensuráveis, a partir de uma construção geométrica. O passo seguinte cuida do processo de medição de segmentos a partir de uma unidade de medida. A intenção é mostrar que *o processo de medição permite introduzir tanto os números que serão ditos racionais, quanto aqueles que serão ditos irracionais* (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 2). Apesar do nível de rigor matemático do material causar algumas dificuldades no início, como relatado por alguns participantes, a proposta tem o mérito de tratar os números reais de uma forma diferente do que é usualmente feito em uma disciplina de análise real, quando o assunto é tratado de maneira puramente formal, sem fazer relações com a medição de segmentos.

Pasquini (2007) realizou um estudo referente à proposta de ensino dos números reais via medição de segmentos que acabamos de apresentar. Esse estudo foi composto da análise do material proposto por Baroni e Nascimento (2005), da observação das aulas de análise real da professora Rosa Lúcia Sverzut Baroni para alunos da pós-graduação em educação matemática da Unesp/Rio Claro no ano de 2005, além de entrevistas de alguns estudantes. Em suas considerações finais, Pasquini (2007) deliberadamente não apresenta os resultados de seu trabalho. Contudo, a fala de um professor que participou da pesquisa mostra que o material utilizado no curso tem potencial, inclusive, para o tratamento dos números irracionais.

> Com certeza, com certeza, e houve discussão de conceitos . . . bem elaborados na minha opinião, e eu achei coisas que eu não tinha pensado antes. Eu acho que a gente tem algumas pendências, pra mim, quando eu começo a falar do número irracional do jeito que ele aparece por aí, é um nó, eu acho que pensando nesse processo de medição, pode ser uma saída pra um material muito diferenciado, ... (PASQUINI, 2007, p. 160).

Ainda no que se refere ao ensino de números utilizando a medição de segmentos, a proposta do psicólogo russo Vasily Davydov vai ainda mais longe: ensinar números via medição de segmentos desde o primeiro ano do ensino fundamental. Trata-se de uma abordagem desenvolvida em sala de aula ao longo de 25 anos, a partir dos pressupostos da teoria sócio-histórica de Vygotsky. Publicada em livros didáticos e de orientações para professores na União Soviética, inclusive com sugestões de atividades (ROSA; DAMAZIO; SILVEIRA, 2014), a proposta de Davydov e seus colaboradores aponta para o tratamento dos números como um todo contínuo desde sua introdução – o que é incompatível com o ensino tradicional, que o concebe como partes discretas (DAMAZIO; ROSA; EUZÉBIO, 2012). Mas, a principal diferença entre a abordagem davydoviana e a tradicional, aquela que encontramos na maioria dos livros didáticos brasileiros, é que na primeira,

> É necessário que se tenha como princípio que, mesmo no primeiro ano, o aluno adquira a concepção de número real. Para tanto, o sistema de tarefas foge dos padrões daquelas apresentadas aos alunos que estabelecem como conteúdo primeiro o número natural. A preocupação inicial não é a sequência numérica e a escrita dos signos, mas a ideia de valor e suas relações de igualdade e desigualdades. Para tanto, as tarefas envolvem a comparação (comprimento, área, massa, volume), que são identificadas e representadas, pelo estudante, inicialmente, por tiras, depois por segmentos, posteriormente, por letras e signos. Momento em que o estudante faz anotações do tipo $a = b, a > b$ e $a < b$. O conceito de número é introduzido como relação multiplicativa, traduzida por $a/c = n$, onde n é qualquer número, c é uma medida e a uma medida múltipla de c (DAMAZIO; ROSA; EUZÉBIO, 2012, p. 228).

Pela ótica da concepção davydoviana, o ensino tradicional de números procede muito rapidamente para a escrita dos números, sem um trabalho prévio consistente em relação ao significado dessa escrita. A proposta de usar a medição de segmentos é vista como vantajosa, pois ela consegue dar um significado único para todos os números e operações com números, além de dispensar as tradicionais justificativas de fechamento algébrico para a ampliação dos conjuntos numéricos. Não são apenas os educadores matemáticos que dizem isso, mas também os matemáticos. Para Elon Lages Lima, *o processo de medição das grandezas contínuas conduz à noção de número real* (LIMA *et al.*, 1996, p. 52). Para Hyman Bass,

> Desenvolver os números no contexto da medida oferece um contexto produtivo para desenvolver a reta real através das séries escolares. Depender exclusivamente do modelo discreto de contagem leva ao que chamarei de "narrativa da construção" da reta numérica, na qual os novos tipos de números, suas notações e suas operações, são adicionadas incrementalmente sem uma interconexão suficiente (BASS, 2015, p. 12, tradução nossa).