Lesson Study em MATEMÁTICA

Café, leite e Matemática

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Julia Schaetzle Wrobel

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Edifes

Café, leite e matemática

Série *Lesson Study* em Matemática - Nº 01

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Julia Schaetzle Wrobel

Café, leite e matemática

Série *Lesson Study* em Matemática - Nº 01

Edifes

Vitória, 2017

(Biblioteca Cefor do Instituto Federal do Espírito Santo)

S729c Souza, Maria Alice Veiga Ferreira de.
Café, leite e matemática / Maria Alice Veiga Ferreira de Souza, Julia Schaetzle Wrobel. Vitória, ES, Edifes, 2017.
85 p. : il.

Inclui bibliografia
ISBN 978-85-8263-248-2 (e-book)

1. Matemática – Estudo e enino. 2. Matemática – Resolução de problemas. 3. Professores - Formação. I. Souza, Maria Alice Veiga Ferreira de. II. Wrobel, Julia Schaetzle. III. Instituto Federal do Espírito Santo. IV. Título.

CDD: 510.7

Se você quer melhorar a educação, reúna professores para estudar os processos de ensino e aprendizagem na sala de aula.

James W. Stigler

Agradecimentos

A consumação deste livro, que é o primeiro da série *Lesson Study* em Matemática, só foi possível pela participação, envolvimento e dedicação de várias pessoas, cada qual a seu modo e revestindo-se em diferentes papéis e frentes. É para elas que direcionamos nossos sinceros agradecimentos que correm mais especificamente a seguir.

Às professoras Bruna Zution Dalle Prane, Hellen Castro de Almeida Leite e Vanessa Ribeiro Gaigher pelos muitos encontros de planejamento, críticas e sugestões que precederam o *Lesson Study* que originou este livro, se concretizando como verdadeiras parcerias e se consolidando como um grupo que pensa e se interessa por ensino de Matemática de qualidade ao longo de todo o trabalho.

Aos doze professores de Matemática da Prefeitura Municipal da Serra pela disposição e interesse em novas maneiras de lidar com o ensino da Matemática, apesar dos obstáculos de diferentes ordens impostos em nosso país: Aline Tavares Soares, Antonio Donato Zucchi Neto, Geraldo Gonçalves de Paula Costa, José Nonir Sily Vargas, Leni das Graças Soares de Paula, Luiz Felipe Afonso Melo, Maria Aparecida Moreira, Maria do Carmo Almeida Silva, Marisa da Silva Araújo, Roger Artur Jahring Wanderley, Rúbia Cristina Nascimento Sobrinho e Vania Aparecida Silva de Almeida.

À equipe do Centro de Formação "Prof. Pedro Valadão Perez" por acreditar em nosso trabalho e providenciar a infraestrutura para o planejamento da aula, além de incentivar os professores da rede municipal da Serra, em especial à Prof. Maria do Socorro de Souza Marques (Gerente de Formação), Profa. Denise Silva Tomasi da Rocha (Assessora Pedagógica de Ciências), Márcia Lamas (Secretária de Educação) e Audifax Charles Pimentel Barcelos (Prefeito do Município da Serra).

À Valdira Pimentel (Diretora da EMEF Paulo Freire) e Rita de Cássia Cassunde Roriz (Pedagoga da EMEF Paulo Freire) por abrir gentilmente as portas para a aplicação da aula e aos treze alunos que aceitaram o desafio apresentado pelo Problema do Café com Leite.

Aos colegas engenheiros, Sotério Ferreira de Souza e Carolina Veiga Ferreira de Souza, pela solução visual alternativa que pode ser aplicada em qualquer âmbito educacional.

Aos colegas da Comissão Científica pelas valiosas contribuições para o enriquecimento do livro.

Finalmente, ao Ifes e à Ufes por acreditarem em nosso potencial como profissionais e nos apoiarem a fazer sempre mais e melhor pela educação matemática brasileira.

Muito obrigada!

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Julia Schaetzle Wrobel

Prefácio

O presente volume é o primeiro de uma série que objetiva comunicar experiências com formação continuada de professores que ensinam matemática na educação básica, conduzidas de acordo com os princípios da metodologia *Lesson Study* (e.g. Fernandez, Yoshida, 2004), inicialmente proposta e praticada no Japão. Este projeto se insere em uma agenda acadêmica e política de crucial importância no Brasil e no mundo do século XXI: repensar e reconstruir propostas e práticas de formação de professores para a escola básica, a partir da reflexão sobre as próprias práticas escolares.

Como a literatura de pesquisa que discute formação de professores têm denunciado, tanto no Brasil (e.g. FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013; MOREIRA, FERREIRA, 2013) como no cenário internacional (e.g. SHULMAN, 1986), a atividade de ensinar na escola básica muitas vezes é desqualificada como uma atividade profissional, ou considerada como uma atividade que "qualquer um pode fazer" – e que, portanto, prescinde de uma formação própria, pois não se sustenta em saberes específicos.

Em oposição a tal concepção, Shulman (1986) propõe a noção de conhecimento pedagógico de conteúdo, como o conhecimento sobre os aspectos do conteúdo que o fazem ensinável a outros, isto é, como um conhecimento *sobre* o conteúdo *para* o ensino, que não pode ser reduzido a uma versão do conhecimento de conteúdo *per se*. Tardif, Raymond (2000, p. 209) caracterizam os *saberes profissionais de professores* como "saberes mobilizados e empregados na prática cotidiana, que dela se originam e que servem para dar sentido às situações de trabalho que lhes são próprias". Nóvoa (2009) defende a necessidade de *uma formação de professores construída dentro da profissão*, isto é, uma formação que tenha tais conhecimentos e saberes como origem e como objetivo. Nas palavras de Noddings (1992), mais do que um rótulo para um corpo de conhecimento, a expressão *conhecimento pedagógico de conteúdo*, cunhada por Shulman, é um *grito de guerra político*, que clama pela necessidade e a urgência de se repensar os modelos usais de formação de professores, incorporando-se a estes os saberes necessários para a prática.

A agenda em que o presente projeto está inserido ecoa com grito político clamado por Noddings e se estabelece em uma dimensão acadêmica, pois demanda fundamentação teórica em permanente diálogo com o social, e em uma dimensão política, uma vez que exige um questionamento profundo das concepções mais fundamentalmente estabelecias sobre o que é a escola, quais são seus objetivos e seu lugar na sociedade. A conjuntura social e política global atual impõe a necessidade de reafirmar as ideias de *educação* como um direito universal, acessível a todas e a todos; e de *escola*, como um lugar de produção de saberes e de construção de cidadania, e não meramente de transmissão de conhecimentos prontos. Essa problemática reforça a urgência de repensar os modelos de formação inicial e continuada de professores, levando em conta as reflexões dos autores citados acima, sob pena de continuarmos a formar professores de maneira anacrônica, para uma escola que não existe mais, ou para uma escola que visa treinar quadros a serviço de interesses particulares, que não são escolhidos pelos próprios envolvidos, e dos quais estes podem nem mesmo estar conscientes.

Lesson Study é uma metodologia desenvolvida no Japão, empregada tanto em formação inicial como continuada, que determina a pesquisa da prática do professor com o objetivo aperfeiçoar sua abordagem pedagógica, potencializando a aprendizagem efetiva e participativa dos alunos. Para este fim, aulas são elaboradas de forma colaborativa por grupos de professores, a partir de discussões e reflexões coletivas. Essas aulas são então aplicadas, e, em seguida, discutidas e reconstruídas sucessivamente pelo grupo.

A presente coleção de textos tem por objetivo narrar uma série de experiências com formação de professores desenvolvidas com a metodologia de *Lesson Study* – que preserva e incorpora os princípios e méritos da proposta original. Em primeiro lugar, de forma consonante com as tendências da pesquisa em formação de professores, estas experiências se estabelecem em uma proposta de formação de professores em que os saberes profissionais docentes são (re)construídos a partir das necessidades da prática profissional trazidas pelos próprios professores participantes. Desta forma, os professores adquirem um lugar de protagonismo, como *atores e autores* do próprio processo formativo (como defende Nóvoa, 2009). Tal proposta se articula com a concepção de *conhecimento-da-prática*, proposta por Cochran-Smith, Lytle (1999), em que os saberes para o ensino não podem ser dissociados em teóricos e práticos e são produzidos quando os professores consideram suas próprias práticas como objeto de investigação intencional. Segundo essa concepção, os professores produzem o conhecimento no *locus* da prática, trabalhando em comunidades de investigação, em que teorizam a partir da prática, e praticam essas teorias. De fato, um aspecto central da proposta é o trabalho colaborativo de professores, que contribui para a construção da identidade profissional docente. Esse trabalho colaborativo não se restringe, porém, a professores que lecionam na educação básica, incluindo também docentes da universidade, em uma perspectiva de *co-formação* – segundo a qual tanto docentes da escola básica como docentes da universidade assumem papéis ao mesmo de formandos e de formadores, de professores e de aprendizes. Cabe destacar ainda que a proposta preconiza abordagens pedagógicas que incentivam a participação ativa de alunos da escola básica, valorizam sua produção, e colocam o erro como um elemento intrínseco à construção de conhecimento, e não como fator de classificação de alunos como "bons" e "ruins".

Sendo assim, esta coleção oferece uma contribuição importante para formação de professores no Brasil, não apenas problematizando paradigmas vigentes, como também construindo efetivamente propostas alternativas.

Victor Giraldo
Laboratório de Práticas Matemáticas para o Ensino
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Referências

FERNANDEZ, C.; YOSHIDA, M. *Lesson Study:* a japanese approach to improving mathematics teaching and learning. New Jersey, EUA: Autores Associados, 2004. p. 235.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema*, v. 27, n. 47, p. 917-938, 2013.

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. Relationships of knowledge and practice: teacher learning in communities. Review of Research in Education, London: Sage, n. 24, p. 249-305, 1999.

MOREIRA, P.; FERREIRA, A. O Lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática. *Bolema*, v. 27, n. 47, p. 981-1005, 2013.

NODDINGS, N. Professionalization and Mathematics Teaching In: Grouws, D. (Ed). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p. 197-208. New York: MacMillan, 1992.

NÓVOA, A. *Professores: Imagens do Futuro Presente*. Lisboa: Educa, 2009.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v.15, p. 4-14, 1986.

TARDIFF, M.; RAYMOND, D. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. *Educação & Sociedade*, ano XXI, n. 73, p. 209-244, 2000.

APRESENTAÇÃO DA SÉRIE

> E tantos verbos de persuadir requerem os verbos de ousar. De provocar o sujeito a significar sua existência pela contraposição ao que está posto, de forma a atender as suas reais necessidades. Assumir insubmissões é assumir o direito à liberdade de pensar, de questionar, de buscar respostas...[1]

Nesse espírito de insubordinações criativas, proposto por D´Ambrósio e Lopes[2], apresentamos a série *Lesson Study* em Matemática, motivadas pelo desejo de divulgar aulas de Matemática elaboradas sob as premissas do método japonês *Lesson Study* ou Estudo/Pesquisa de Aula na língua portuguesa[3].

Nossa opção pelo *Lesson Study* como fio condutor das ações de ensino e de seus impactos sobre a aprendizagem de estudantes não é incidental, mas pautada nos resultados em testes de larga escala apresentados pelo Japão, como reflexo de práticas que vêm se mostrando potenciais para a aprendizagem em Matemática, demonstradas no meio científico e acadêmico, comprovadas empiricamente pelas organizadoras desta série.

O que se pretende é propagar aos professores de Matemática o resultado de aulas planejadas-executadas-refletidas que poderão funcionar como ponto de partida para suas próprias ações de ensino, deixando a cargo de sua criatividade e experiência avanços a partir do que for apresentado em cada volume da série. Desse modo, o professor imprimirá

[1] D'Ambrosio; Lopes (2015a, p.14-15).
[2] D'Ambrosio; Lopes (2015b).
[3] Optamos pela utilização do termo *Lesson Study*, em vez de Estudo/Pesquisa de Aula ou *Kenkyujugyo,* por sua ampla difusão no meio acadêmico-escolar-científico.

sua marca pessoal, vez que cada turma tem seu modo de ser e sentir o mundo, seu contexto e sua história. Ademais, os livros podem ser utilizados em disciplinas específicas de licenciatura, de pós-graduações e em atividades de formação continuada em ensino de Matemática.

Para além de um produto educacional em ensino, os livros da série *Lesson Study* é, em si, um resultado de pesquisa aos olhos de investigadores em Educação Matemática, mas com o cuidado de serem escritos com linguagem própria da sala de aula.

Por fim, cabe destacar que cada volume da série se apresenta independente, podendo ser lido e levado a efeito fora de ordem, conforme o interesse do leitor.

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Julia Schaetzle Wrobel

SUMÁRIO

LESSON STUDY

Lesson Study[4] é um método japonês de pesquisa da prática do professor com o objetivo de potencializar a aprendizagem efetiva e participativa dos alunos. Para isso, as aulas são elaboradas por um grupo de professores, de modo colaborativo seguido de reflexão sobre a vivência.

No Japão, a prática do *Lesson Study* se presta, igualmente, tanto para a formação inicial quanto continuada de professores, com destaque para professores recém-formados que assumem, pela primeira vez, suas salas de aula e podem contar com a experiência de colegas mais experientes[5].

Para além do Japão, a literatura acadêmica aponta a importância do trabalho docente colaborativo por meio de investigação, estudo e reflexão da própria prática. As aprendizagens profissionais podem ser constituídas pela troca de saberes e experiências e o trabalho colaborativo apresenta-se como uma via importante para potencializar a aprendizagem do aluno[6]. Por promover fortemente esse espírito de colaboração e reflexão, entendemos que o *Lesson Study* pode e deve se firmar como um método de ensino também no Brasil.

Em sua essência, o *Lesson Study* é composto por três etapas:

[4] Fernandez; Yoshida (2004), Takahashi (2006), Isoda; Olfos (2009), Fujii (2014).

[5] Para uma descrição detalhada do *Lesson Study* Japonês, o leitor pode consultar Fernandez; Yoshida (2004).

[6] Ferreira (2003), Fiorentini (2004), Miskulim et al. (2005), Ibiapina (2008), Baldin (2009), Cyrino; Caldeira (2011), Giraldo et al. (2016).

Etapa 1: Planejamento

Nesse primeiro momento, o grupo de professores se reúne para definir o conteúdo escolar e o caminho que devem trilhar para alcançar esses objetivos. Diferentemente de um plano de aula comum, burocrático, em que o professor descreve o conteúdo, objetivos gerais e específicos, procedimentos, recursos e avaliação, no *Lesson Study* o plano de aula é sempre criteriosamente elaborado, prevendo participação ativa dos alunos. Nesse sentido, o grupo discute as situações ou problemas que serão propostos no início da aula e se tal proposta é adequada ao contexto dos alunos. Há previsão dos questionamentos que devem ser realizados para conduzir o pensamento dos estudantes, bem como as respostas esperadas. Conhecimentos prévios são pensados, dificuldades epistemológicas e dúvidas são previstas e maneiras de lidar com cada uma delas são debatidas. Preveem-se que os alunos vão à lousa apresentar, e discutir, suas estratégias e pensamentos, considerando as múltiplas estratégias matemáticas e as possíveis conexões entre elas. Nesse momento, cada professor contribui com a sua experiência no assunto, suas leituras prévias e, ao final, produzem, conjuntamente, um plano de aula que descreve em detalhes o projeto que acreditam ser o melhor para a(s) aula(s) que pretendem lecionar.

Etapa 2: Execução

O passo seguinte é a aula propriamente dita. Um dos professores executará as ações planejadas em sua própria classe sob a observação de todo o grupo, que não interfere no andamento da aula. Tendo o planejamento em mãos, como um guia, os professores apenas observam e realizam anotações para posterior reflexão. Seus olhares concentram-se nas respostas, facilidades ou dificuldades dos alunos, nas atitudes do professor, na coerência entre o planejamento e a execução e na necessidade de realização de novo planejamento para uma aula futura. A execução da aula deve levar em conta a valorização da produção dos alunos, com o uso do erro como elemento favorecedor da construção do raciocínio pela turma. É importante que todos os alunos estejam engajados na discussão e solução do problema e que a aula seja conduzida em torno das ideias matemáticas, sem que o tempo seja consumido com questões irrelevantes para a Matemática ou que não levem à solução do problema. Por fim, é importante realçar os o cuidado com a organização da lousa, o compartilhamento de ideias pelos alunos e a síntese dessa produção matemática pelo professor.

Etapa 3: Reflexão

Assim que a aula acaba, os professores se reúnem para analisar a execução do plano verificando o que foi, ou não, realizado pelo professor. O objetivo nesse momento é refletir sobre suas observações e reações dos alunos, decidir pela necessidade de novo planejamento a fim de corrigir opções equivocadas no plano de ação do professor, inserir discussões que surgiram como imprevistos na execução da aula, por exemplo, sempre com o objetivo de potencializar a aprendizagem dos alunos. Assim, o grupo pode decidir-se por debruçar sobre possíveis melhorias na aula, aprimorando o que foi feito até esse momento e atualizando o planejamento, inaugurando uma nova etapa.

Em seguida, outro professor do grupo pode ministrar essa nova aula em sua classe, observado pelos colegas e seguido de nova reflexão, em um processo contínuo denominado por nós de Espiral do *Lesson Study*[7], uma vez que a cada nova edição de planejamento-execução-reflexão, agregam-se experiências em nível mais elevado de maturidade (Figura 1).

Figura 1. Espiral do *Lesson Study*.

Fonte[8]: Gaigher; Souza; Wrobel (2017).

Antes de adentrar o Problema do Café com Leite, gostaríamos de clarificar alguns termos japoneses frequentemente usados na literatura sobre *Lesson Study*[9]:

Bansho — Aula registrada na lousa. Não se trata da simples exposição das estratégias, mas sim a questão da aula, os dados, objetivos, as diversas estratégias matemáticas, as conexões, as justificativas, os argumentos e a

[7] Gaigher; Souza; Wrobel (2017).
[8] Todas as outras figuras do texto são de autoria das autoras e por essa razão, optamos por não destacar repetidamente a fonte ao longo do texto.
[9] Fernandez; Yoshida (2004, p.235). Adaptação das autoras.

	síntese. Usualmente, a lousa não é apagada durante a aula. Professores japoneses consideram-na como importante ferramenta de ensino para organizar os pensamentos dos alunos.
JugyoKenkyu	Termo original para *Lesson Study* (*Jugyou* significa aula e *Kenkyuu*, pesquisa. Logo, pesquisa de aula)
Konaikenshu	Formação continuada de professores. *Konai* significa “na escola” e *kenshu*, “treinamento” no sentido da formação do profissional.
Neriage	Momento em que os alunos, cuidadosamente guiados pelo professor, compartilham suas ideias, analisam, comparam e contrastam criticamente essas ideias, considerando questões como eficiência, generalização e semelhança com ideias previamente aprendidas. É a conclusão coletiva apurada por todos.

O PROBLEMA DO CAFÉ COM LEITE

Suponha que você tenha uma xícara cheia de café do respectivo e saborosíssimo líquido negro e um copo alto cheio de leite, cerca de 6 vezes o tamanho da xícara. Mergulhe uma colher de chá na xícara de café e despeje o seu conteúdo no copo de leite. Depois, volte a mergulhar a mesma colher no copo que agora tem a mistura e devolve-a à xícara de café. Completada essa operação, qual destas afirmações está certa?

1) Há mais café no copo de leite do que leite na xícara de café.

2) Há tanto café no copo de leite quanto leite na xícara de café.

3) Há mais leite na xícara de café do que café no copo de leite[10].

[10] Adaptado de Rosário; Núñez; González-Pienda. (2006).

Problemas de Matemática podem remeter a diferentes entendimentos. Para nós, estamos diante de um problema quando nos interessa resolver uma questão matemática para a qual não dispomos de um algoritmo ou uma estratégia prévia que o solucione. Assumir essa postura leva a diferenças importantes sobre o que seja um problema e um exercício. Um exercício de Matemática exige pouco investimento cognitivo por se traduzir em algo previamente conhecido para executá-lo. O exercício promove automatismos e consolidações mentais essenciais para muitas tarefas, mas que se diferem dos estímulos internos que um problema requer[11].

O Problema do Café com Leite não remete o resolvedor a soluções imediatas para a maioria das pessoas ao requerer uso de aparato lógico e matemático para solucioná-lo. Esse problema ainda conta com outras peculiaridades que valem a pena mencionar. Ele pode ser identificado como um problema verbal[12] e como um problema mal estruturado. Vamos explicar.

Um problema verbal[13] de Matemática é conhecido por revelar uma história ou narrativa contada em linguagem natural nas quais a questão matemática está contextualizada. O "Café com Leite" é um problema mal estruturado por não apresentar uma representação mental clara para sua solução. Na Psicologia Cognitiva, problemas podem ser categorizados como bem estruturados ou mal estruturados em um *continuum* de clareza das representações mentais[14]. As representações

[11]Souza; Souza (2016), Souza (2012), Ponte (2005), Pólya (1978), Schoenfeld (1985).

[12] Problemas verbais são conhecidos literatura geral como *word problem*.

[13] Souza; Guimarães (2015a).

[14] Sternberg (2000).

geralmente envolvem percepções, pensamentos, uso de memória(s) na mente da pessoa durante operações cognitivas[15]. Ao contrário, problemas de Matemática bem estruturados costumam promover menos estímulos internos. O uso de problemas mal estruturados é uma estratégia pedagógica. Se o aluno conhece a fórmula de Bháskara, encontrar as raízes de uma equação polinomial do segundo grau pode ser exemplo de uma proposta bem estruturada, no sentido que a Psicologia Cognitiva nos aponta.

Por fim, é útil discorrermos brevemente sobre a importância de se trabalhar a resolução de problemas em aulas de Matemática. Documentos oficiais de todo o mundo[16] recomendam essa prática por ser um meio de desenvolvimento da autonomia e pensamento crítico que toda educação deve promover. No Brasil acredita-se que

> o fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos que admitem diferentes respostas em função de certas condições, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos [17].

Apesar das recomendações expressas nesses documentos ou em artigos científicos[18], a Matemática Escolar parece ter assumido a resolução de problemas como uma atividade complementar[19], na melhor das hipóteses. Talvez o ingrediente de imprevisibilidade

[15] Vandenbos, Dicionário de Psicologia da APA (2010).
[16] NCTM (1980), Ministério da Educação (2007), Takahashi (2006), Brasil (1998).
[17] Brasil (1998, p.42).
[18] Onuchic (2014), Schoenfeld (1996), Abrantes (1989), Lester; Garofalo (1982)entre outros.
[19] Abrantes (1989).

que sua incorporação acrescenta ao ensino contribua para afastar professores de práticas pedagógicas mais pautadas pela resolução de problemas, no sentido que discutimos aqui. A boa notícia é que o *Lesson Study* pode contribuir para que o professor construa uma bagagem didático-pedagógica e matemática mais sólida, o que pode repercutir no desenvolvimento de sua própria segurança profissional, por meio do contato com um repertório mais amplo de estratégias, modos de pensamento e ideias.

O professor pode considerar o ensino com a resolução de problemas de três maneiras:

- como aplicação de conhecimentos (aprendem-se as regras e as aplicam para resolver um problema),
- como via de aprendizagem (o problema é proposto para se aprender um conteúdo matemático) ou, simplesmente,
- como motivação (para despertar interesse e encanto dos alunos pelos objetos matemáticos e beneficiar-se dele para solução de problemas)[20].

Essas premissas se firmam como antecedentes para o desenvolvimento do *Lesson Study* baseado no problema do Café com Leite que passamos a apresentar.

[20] Souza; Guimarães (2015b).

COMO E ONDE TUDO ACONTECEU

O *Lesson Study* (*Kenkyujugyo*) sobre o Problema do Café com Leite aconteceu no segundo semestre de 2016 com 12 professores de Matemática do Município da Serra – ES, duas professoras do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), duas docentes da Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes) e uma da rede estadual do Estado do Espírito Santo, todas professoras de Matemática, pós-graduadas em Matemática ou Educação Matemática, duas das quais, autoras deste livro. O grupo era composto de dezessete professores.

Este grupo foi constituído para uma Formação Continuada de Professores de Matemática do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental com o objetivo de contribuir para suas práticas de ensino em aulas de Resolução de Problemas, visando o desenvolvimento cognitivo dos alunos em suas compreensões textuais, ampliação do repertório de estratégias, interação entre alunos e entre aluno e professor, a partir de uma parceria entre o Centro de Formação da Secretaria Municipal de Educação do município da Serra – ES, o Instituto Federal do Espírito Santo e a Universidade Federal do Espírito Santo. Como ações desta Formação, destacamos o estudo de aspectos teóricos para embasar nossas práticas e a elaboração-execução-reflexão de uma aula baseada em problema em um cenário de *Lesson Study*, como mostramos a seguir.

Os encontros foram gravados em vídeo para a revisão da escrita do planejamento, para reestudo da participação e aprendizagem dos estudantes em aula e para subsidiar aspectos pontuais que foram objeto de reflexão posterior das autoras. As imagens e vozes serviram, igualmente, para ilustrar e aumentar o poder de compreensão de passagens de todas as etapas do *Lesson Study* neste livro.

Todos os registros foram autorizados pelos participantes em um termo de consentimento livre e esclarecido, permitindo que o material seja utilizado para fins acadêmico-científico, inclusive com o uso de imagens e nomes reais. Além disso, o prefeito e a secretária de educação do município da Serra – ES concordando com a divulgação do nome do Centro de Formação, da escola e do município onde ocorreu o *Lesson Study*. Dessa forma, optamos por não usar nomes fictícios no livro.

Sobre a Formação propriamente dita, os encontros para o planejamento da aula foram realizados no Centro de Formação "Prof. Pedro Valadão Perez", às sextas-feiras, das 8 às 11h, um espaço destinado à formação continuada dos professores da Prefeitura Municipal da Serra (*konaikenshu*), como mostra a Figura 2. Este dia é destinado pela Secretaria de Educação da Serra - ES para o planejamento de aulas de Matemática e, dessa forma, professores de Matemática não estão em sala de aula e puderam se ausentar de suas escolas para participar da Formação. Ainda assim, professores optaram por executar suas atividades de planejamento elencadas para aqueles dias em horário fora do expediente, o que, por si só, demonstra o grande interesse no tema da Formação.

Figura 2. Professores em formação.

A execução da aula ocorreu na EMEF Paulo Freire, local de trabalho do professor eleito pelo grupo para ministrá-la. A escolha do professor ocorreu entre aqueles que ministravam aulas no ano escolar cujos alunos teriam nível de maturidade e bagagem matemática para o desenvolvimento do problema. Além disso, o professor deveria se sentir seguro para executar a aula.

A aula foi executada para 13 alunos regulares do 8º ano. Os pais destes alunos autorizaram os registros, permitindo que o material seja utilizado para fins acadêmico-científico. Logo após o término da aula, o grupo de professores voltou a se reunir para refletir e discutir impactos do planejamento executado sobre a aprendizagem dos alunos. Todo o *Lesson Study* aconteceu em 5 encontros (do 3º ao 7º) conforme detalhados no quadro abaixo, além de 2 (1º e 2º) que foram destinados à discussão sobre aspectos teóricos e práticos ligados à Formação e o último (8º) que versou sobre a avaliação da Formação de um modo geral:

Encontro	Conteúdo dos encontros
1 e 2	Estudo sobre o método *Lesson Study*, a Resolução de Problemas e a Prática do Ensino de Matemática.
3, 4, 5 e 6	Seleção do Problema do Café com Leite em meio a uma lista de problemas do tipo mal estruturados. Realização do planejamento da aula. Discussão e apresentação de diferentes estratégias para a solução do problema. Escolha do professor executor da aula, da escola, do ano escolar, do dia da aplicação, da duração da aula e do local para reunião após a aula.
7	Execução da aula seguida de reunião para reflexão e avaliação dos resultados da aprendizagem. Avaliação sobre a potencialidade do planejamento concretizado na aula.
8	Avaliação da Formação.

Passaremos, então, a uma discussão sobre cada uma das etapas de planejamento, execução e avaliação sobre uma aula em que se explorou o Problema do Café com Leite.

O PLANEJAMENTO COLABORATIVO

Com os professores reunidos e familiarizados com o problema, chegou a hora de colocar a “mão na massa” e planejar a aula (Figura 3). É importante destacar que apresentamos neste texto partes relevantes da construção desta etapa, evitando repetições desnecessárias, considerando que, de fato, muitas vezes o planejamento avançou e retrocedeu, como todo processo natural de pensar e repensar um tema.

Figura 3: Professores elaborando o planejamento.

A primeira questão levantada pelas professoras que conduziam a formação foi a escolha do público-alvo para aquele problema e o grupo de professores decidiu ser adequado ao 8º ano, compatível com a maturidade e requisitos matemáticos desses alunos. Para estes alunos, o problema não seria difícil demais a ponto de desistirem nem tão fácil que chegasse a ser desestimulante. Definiu-se, também, sua aplicação em uma aula de 100 minutos.

Ao mesmo tempo, o grupo de professores ponderou sobre os objetivos da aula, quais sejam: desenvolver nos alunos a capacidade de resolução de problemas matemáticos, promover a autonomia de pensamento e liberdade de expressão das ideias matemáticas, conhecer diferentes estratégias matemáticas, possibilitar/estimular a oralidade, interação e a capacidade de argumentação dos alunos, entre outros objetivos.

DINÂMICA DA AULA

Os professores definiram que o problema será entregue/proposto aos alunos no início da aula, para que não peçam a alguém para resolver por eles ou que busquem na internet uma solução. A ideia é que todo o envolvimento com o problema se dê para os alunos no mesmo momento.

Para privilegiar a interação, a classe será dividida em grupos de, no máximo, três alunos. Os alunos farão uma primeira leitura do problema individualmente. Em seguida, um aluno será convidado a ler novamente em voz alta. O professor verificará a compreensão textual do problema pelos alunos para, em seguida, pedir que o solucionem conjuntamente nos grupos. Neste momento, o professor visitará os grupos mediando o processo de solução por meio de questionamentos. Ao transitar entre os grupos, verificará as estratégias e possíveis erros dos alunos, munindo-se de dados que poderão conduzir suas próximas ações, durante o *neriage*.

Em meio a essa discussão, uma professora previu a reação da turma diante da proposta da atividade:

Rubia	Meu aluno logo perguntaria se a atividade vale nota. O que vamos dizer?
Maria Alice	Não vejo problema em valer alguma nota, como uma espécie de motivação extrínseca que aos poucos queremos que se transforme em uma motivação intrínseca.

O grupo também registrou algumas recomendações para a condução da aula: o professor não deveria responder aos próprios questionamentos, o que é muito comum. Ao contrário, ele deveria dar tempo para os alunos refletirem. Foi recomendada a preocupação em envolver todos os alunos na discussão, por meio de perguntas e pela valorização de suas produções. Isso promoveria o compartilhamento de raciocínios/soluções uns dos outros, valorizando a participação do aluno e utilizando o erro como oportunidade de aprendizado.

Outra questão que deve ser observada durante a aula é o tipo de questionamento que o professor faz aos alunos. Perguntas do tipo "o que vocês entenderam do problema?" ou "como vocês resolveriam?" são amplas e prejudicam o fluxo de raciocínio[21]. Questionamentos desse tipo devem ser substituídos por: "o que significa a palavra respectivo?", por exemplo.

COMPREENSÃO DO TEXTO DO PROBLEMA

Em seguida, os professores passaram à discussão do contexto do problema e concluíram que ele estava totalmente inserido no cotidiano daqueles alunos. Os alunos conheciam café e leite, mas, ainda assim, os professores previram um possível questionamento pelo aluno:

[21] Wrobel et al. (2016).

Rúbia	E se o aluno disser que não gosta de café com leite?
Hellen	Nesse caso, você pode pensar em uma mistura de suco de uva com água ou tinta branca e tinta preta.

Uma vez definido o ano escolar em que o problema seria aplicado e seu contexto, os professores passaram a discutir sobre a compreensão do enunciado do problema. Para isso, elencaram expressões/palavras do texto que poderiam gerar dúvidas nos alunos, como mostram os destaques coloridos a seguir:

Suponha que você tenha uma xícara cheia de café do respectivo e saborosíssimo líquido negro e um copo alto cheio de leite, cerca de 6 vezes o tamanho* da xícara. Mergulhe uma colher de chá na xícara de café e despeje o seu conteúdo no copo de leite. Depois, volte a mergulhar a mesma colher no copo que agora tem a mistura e devolve-a à xícara de café. Completada essa operação, qual destas afirmações está certa?**

1) Há mais café no copo de leite do que leite na xícara de café.

2) Há tanto café no copo de leite quanto leite na xícara de café.

3) Há mais leite na xícara de café do que café no copo de leite.

* Altura ou volume? Faz diferença?

** Pode haver transbordamento?

O professor deve estar preparado para levar o aluno a compreender esses termos ou palavras no contexto do problema. Muitas vezes, os alunos possuem dúvidas, mas não as verbalizam. Muitas delas não são, necessariamente, em relação ao conteúdo matemático. Nesse caso, o professor deve averiguar com indagações específicas, tais como: “O que significa a palavra respectivo nesse enunciado?”, “O que quer dizer ‘cerca de’ nesse contexto?”, sempre com o cuidado de não formular perguntas amplas que bloqueiem o pensamento dos alunos. “O que você entendeu do problema? ” é exemplo de pergunta ampla que não contribui para a elaboração de um raciocínio que o guie para a solução.

Dúvidas de outras ordens podem surgir. Um aluno poderia perguntar se tem chá nos recipientes, confundindo o conteúdo da colher com sua capacidade e o professor deve elucidar essa questão. Ou ainda, não conhecerem a palavra “respectivo”. Nesse caso, deveriam esclarecer que respectivo estava relacionado ao que foi escrito antes, no caso, o café. Também poderiam ter dúvida sobre a “operação” e o professor deveria explicar que é a operação de transportar um líquido na colher de um lado para o outro.

No transcurso do planejamento, um professor argumentou sobre o fato de se inserir líquido em um copo que já estava cheio.

Luiz Felipe — Quando o problema fala que o copo está cheio de leite, quer dizer na sua capacidade máxima. Então, quando adiciono algo nesse copo, o líquido vai transbordar.

Hellen — Mas, quando você serve um copo de água na sua casa, você serve o copo cheio, certo? E esse copo está cheio até a sua capacidade máxima?

Roger	O copo está cheio, mas não até a borda, senão o líquido derrama quando ofereço à visita.
Hellen	Então “cheio” pode não significar capacidade máxima.... e como mostraremos isso aos alunos? Podemos levar um copo cheio. Tomar um gole e perguntar se o copo ainda está cheio.
Roger	Mas se bebermos, o líquido diminuirá e o aluno pode pensar que não está mais cheio.
Aline	Concordo. Melhor propor o exemplo de servir água para uma visita.

Além disso, o tamanho do copo e da xícara foram debatidos. Seria necessário conhecermos sua capacidade? Sugeriram levar para a sala de aula uma xícara, um copo e uma colher, para que os alunos experimentassem o que o problema propunha e tivessem a ideia da proporção entre eles. Essa ideia foi aceita por todos por considerarem relevante a materialidade da operação para a resolução do problema. Também foi ensaiado possível diálogo entre professor e a turma:

Aluno 1	Qual a quantidade de café e leite? Quantos ml de cada? Qual o tamanho da xícara? E do copo? E da colher?
Aluno 2	Com certeza a quantidade de leite é maior, porque o copo é maior que a xícara.
Professor que ministrará a aula	Se você achar melhor, fixe quantidades, atribua valores numéricos.

Em uma etapa seguinte, o professor deveria levar o aluno a pensar se a quantidade seria, de fato, relevante para o problema, levando o aluno a concluir não ser relevante. Aliás, se entendemos que o problema está bem formulado e não apresenta dados quantitativos é porque, evidentemente, são desnecessários para a solução. Essa é outra discussão que pode ser levada aos alunos.

Na sequência, os professores passaram ao planejamento da compreensão da expressão “cerca de”.

Hellen	Mas o problema fala em “cerca de seis vezes”.
Marisa	O “cerca de” é importante. Pode ser um pouco a mais ou um pouco a menos e não exatamente seis vezes.
Julia	O “cerca de” mostra que, na verdade, a relação entre capacidade do copo e da xícara não é importante para o problema.
Luiz Felipe	Sim. Essa proporção é indiferente para o problema.

Muitos professores relataram ter resolvido o problema sem dar atenção ao “cerca de”, inclusive considerando a capacidade de o copo ser exatamente seis vezes a da xícara. Temos exemplo concreto da importância do planejamento colaborativo. É importante notar que, verdadeiramente, o “cerca de seis vezes” traz uma noção de que não importa se a proporção é 1:6 ou qualquer outra. Esse dado não é relevante para o problema e isso deve ser considerado na discussão.

ESTRATÉGIAS MATEMÁTICAS

No momento de planejar a execução da resolução matemática do problema, os professores previram algumas perguntas que poderiam integrar o processo de construção da solução matemática. Essas perguntas surgiriam naturalmente na aula, por questionamentos de alunos, ou poderiam ser provocadas pelo professor, caso os alunos demonstrassem dificuldade em construir sozinhos uma solução para o problema.

No início do processo, a mediação poderia ir sugerindo atribuição de quantidades:

Professor que ministrará a aula	Quantos ml tem a xícara? Quantos ml tem o copo? Quantos ml tem a colher?

Se o aluno/a turma adotasse a sugestão do professor, os questionamentos poderiam ser:

Professor que ministrará a aula	Quantos ml de café ficaram na xícara? Quantos ml têm agora no copo de leite? Qual a capacidade total da xícara e do copo nesse momento?

Nessa linha de raciocínio, no momento de se mergulhar a colher no copo e retirar a mistura, poderiam surgir outras indagações:

Professor que ministrará a aula	Agora tem leite e café na colher, quanto tem de cada um?

Após realizar a segunda transferência, poderia perguntar:

Professor que ministrará a aula	Quanto de leite ficou no copo? Qual a capacidade do copo agora? Quanto do leite ficou na xícara de café? E qual a capacidade da xícara?

Com esses questionamentos, pretendemos que os alunos concluam que **há tanto café no copo de leite quanto leite na xícara de café**.

Por fim, é importante fazer com que a turma perceba que se a quantidade de café, de leite e do conteúdo da colher forem diferentes dos eleitos, a resposta ao problema não será alterada. Essa providência visa a levá-los à compreensão de que a solução independe da capacidade dos recipientes, como mencionamos.

De acordo com a literatura, o professor deve estar munido de diferentes estratégias de solução[22] a fim de ampliar o repertório de modos de pensar dos alunos. Essa plasticidade pode fertilizar a busca de solução de outros problemas, além de estimular áreas mentais que necessitem de determinada incitação. É o caso de problemas que possam ser solucionados pela via algébrica, geométrica, por esquemas, tabelas, desenhos etc. É comum que as pessoas tenham tendência a eleger um ou outro modo de solução, a depender dos estímulos que tenham recebido ao longo da escolaridade. Assim, é importante que os professores estejam preparados para cumprir com essa diversidade no ensino. Não só isso. Precisam estar atentos à maneira como diferentes modos de solução se conectam e se esforçarem pela promoção

[22] Hill et al. (2011), Polya (1978), Abrantes (1989), Ponte (2014).

do estabelecimento de canais (sinapses) que se relacionem nesses diferentes modos ou estratégias de resolução pelos alunos.

É notória, por vezes, certa resistência dos alunos (e até de professores) em transitar por diferentes estratégias para um mesmo problema, como podemos verificar no diálogo abaixo. Precisamos estar preparados para isso.

Roger	Os alunos ficam irritados quando solucionamos um problema de duas maneiras diferentes. Dizem que já entenderam e que eu vou confundi-los.
Julia	Mas será que não tem algum aluno na sua turma que não tinha entendido nada e que com essa nova maneira de solução passa a entender?
Roger	É isso que eu sempre falo para eles. Um aluno entende quando eu uso desenho, outro quando eu uso números. E eu preciso garantir que todos aprendam.

Para conhecimento de possíveis estratégias matemáticas para a solução do Problema do Café com Leite, os professores promoveram o compartilhamento de suas próprias estratégias, às quais passaremos a apresentá-las. São elas:

1- uso de porcentagens;

2- atribuição de valores numéricos;

3- álgebra considerando o copo seis vezes o tamanho da xícara;

4- álgebra considerando o copo “A” vezes o tamanho da xícara;

5- uso de analogia discreta.

1- Uma solução numérica com uso de porcentagem (caso particular):

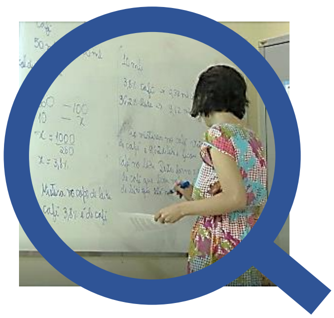
Figura 4. Apresentação da solução da Prof. Aline.

A professora Aline atribuiu valores expressos em ml aos conteúdos da xícara (50ml), do copo (250ml) e da colher de chá (10ml), considerando a capacidade do copo igual a 5 vezes a da xícara. Ela justificou a escolha pensando em facilitar as contas e evitar os números decimais, mas destacou, ao compartilhar a ideia com os colegas, que foi uma estratégia equivocada ao perceber que ao misturar leite e café não teríamos mais um múltiplo de cinco e sim 260 ml de leite com café. Como a proporção entre capacidade da xícara e copo não faz diferença para a solução do problema, manteve os dados como havia pensado inicialmente.

Em seguida, considerou o primeiro transporte de líquido, transformando a quantidade de leite (250 ml) mais o conteúdo de café da colher (10ml) em percentual (100%) a fim de conhecer a relação entre líquidos no copo, concluindo que havia aproximadamente 3,8% de café e 96,2% de leite na mistura.

Depois, voltou a mergulhar a colher no copo com a mistura para devolver à xícara de café. Se a mistura tem 3,8% de café e 96,2% de leite, em uma colher com 10ml, mantendo a proporção, retirou 0,38ml de café e 9,62ml de leite. Essas serão as quantidades despejadas na xícara. Como, inicialmente, despejou 10ml de café no leite, 9,62ml de café se mantiveram no copo. Ou seja, finalizado o processo, obteve 9,62ml de leite na xícara de café e 9,62ml de café no copo de leite, caracterizando a afirmação 2 (Há tanto café no copo de leite quanto leite na xícara de café) como correta. Sua solução está apresentada na Figura 5.

Figura 5. Solução com uso de porcentagem



Café 50ml

Leite 250ml

Colher de chá 10ml

$$x = \frac{1000}{260}$$

$$x = 3,8$$

Mistura no copo de leite com café, 3,8% é de café.

10ml

3,8% Café → 0,38 ml Café

96,2% Leite → 9,62 ml Leite

Ao misturar no café, vieram 0,38ml de café e 9,62 de leite e ficaram 9,62 ml de café no leite. Desta forma, a quantidade de café que ficou no leite é igual à quantidade de leite que está no café.

Mistura no copo de leite com café, 3,8% é de café.

2- Uma solução numérica (caso particular):

A professora Hellen trouxe uma solução que considerava 100ml para a quantidade de café na xícara, 600ml de leite no copo e capacidade de 50ml para a colher de chá. Observe o leitor que esse professor manteve a proporção 1:6 entre os líquidos da xícara e copo, pois, até então, não havia, ainda, entendido de que a manutenção dessa proporção não seria importante, mas era válida como orientadora da representação mental que ele desenvolveu.

A sequência da solução é semelhante à estratégia anterior (percentual), mas agora expressa na forma de fração. O professor atribuiu os valores de 100ml ao conteúdo da xícara e 600ml ao conteúdo do copo, mantendo a proporção de seis vezes. Retirou uma colher com 50ml de café da xícara e despejou no copo, totalizando uma mistura de 650ml no copo. Essa mistura foi composta pela seguinte concentração de líquidos:

$$\frac{50}{650}\text{ café} + \frac{600}{650}\text{ leite.}$$

Ao mergulhar a colher na mistura, retirou 50ml dessa mistura mantendo essas concentrações, ou seja, levou para a xícara de café:

$$50\text{ml.}\frac{50}{650}\text{ café} = \frac{50}{13}\text{ ml de café}$$

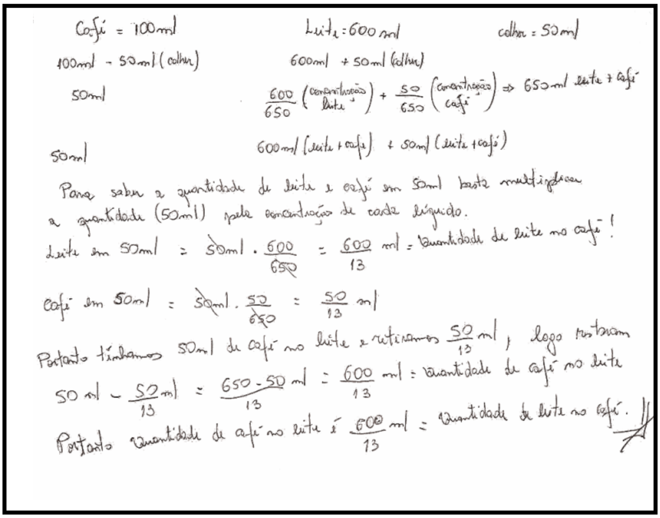
$$50\text{ml.}\frac{600}{650}\text{ leite} = \frac{600}{13}\text{ml de leite (1)}$$

No copo de leite permaneceram os 50ml iniciais de café menos o que acabou de retirar:

$$50 - \frac{50}{13} = \frac{600}{13}\text{ ml de café (2)}$$

Como (1)=(2), a quantidade de leite no café é a mesma do café no leite. A solução original está apresentada na Figura 6.

Figura 6. Solução numérica.



Café = 100ml Leite: 600ml colher: 50ml

100ml − 50ml (colher) 600ml + 50ml (colher)

50ml $\frac{600}{650}$ (concentração leite) + $\frac{50}{650}$ (concentração café) ⇒ 650ml leite + café

50ml 600ml (leite + café) + 50ml (leite + café)

Para saber a quantidade de leite e café em 50ml basta multiplicar a quantidade (50ml) pela concentração de cada líquido.

Leite em 50ml $= \cancel{50}\text{ml} \cdot \frac{600}{\cancel{650}} = \frac{600}{13}$ ml = quantidade de leite no café!

Café em 50ml $= \cancel{50}\text{ml} \cdot \frac{50}{\cancel{650}} = \frac{50}{13}$ ml

Portanto tínhamos 50ml de café no leite e retiramos $\frac{50}{13}$ ml, logo restaram

$50\text{ ml} - \frac{50}{13}\text{ml} = \frac{650-50}{13}\text{ ml} = \frac{600}{13}$ ml = quantidade de café no leite

Portanto quantidade de café no leite é $\frac{600}{13}$ ml = quantidade de leite no café.

3- Uma solução algébrica considerando o copo seis vezes o tamanho da xícara:

Temos inicialmente:

Quantidade de café: x

Quantidade de leite: $6x$

Quantidade de líquido da colher: C

Retiramos uma colher com café da xícara e misturamos o café com o leite do copo.

- a quantidade de café no copo é $\frac{C}{6x+C}$
- a quantidade de leite no copo é $\frac{6x}{6x+C}$

Em seguida, retiramos uma colher dessa mistura e depositamos na xícara.

Para saber a quantidade de leite e de café contida na colher, multiplicamos a capacidade da colher pela quantidade de cada líquido na mistura:

- a quantidade de café na colher é $c\,\frac{C}{6x+C} = \frac{C^2}{6x+C}$.
- a quantidade de leite na colher é $c\,\frac{6x}{6x+C} = \frac{6xC}{6x+C}$. (1)

A quantidade de leite na colher é exatamente a quantidade de leite que será colocada na xícara de café, ou seja, a quantidade de leite na xícara é $c\,\frac{6x}{6x+C}$.
A quantidade de café que permanece no copo é o que tinha (c) menos o que retiramos $\left(c\,\frac{C}{6x+C}\right)$:

$$c - c\,\frac{C}{6x+C} = \frac{C(6x+C)-C^2}{6x+C} = \frac{6xC}{6x+C} \qquad (2)$$

Portanto, como (1) = (2), **concluímos que a quantidade de café no copo de leite é igual à quantidade de leite na xícara de café.**

4- Uma solução algébrica considerando o copo "A" vezes o tamanho da xícara (genérica):

Temos inicialmente:
Quantidade de café: x
Quantidade de leite: Ax, sendo A um número real próximo de 6.
Quantidade de líquido da colher: C

Retiramos uma colher com café da xícara e misturamos o café com o leite do copo.

- a quantidade de café no copo é $\frac{C}{Ax+C}$

- a quantidade de leite no copo é $\frac{Ax}{Ax+C}$

Em seguida, retiramos uma colher dessa mistura e a depositamos na xícara.
Para saber a quantidade de leite e de café contida na colher, multiplicamos a capacidade da colher pela quantidade de cada líquido na mistura:

- a quantidade de café na colher é $c\,\frac{C}{Ax+C} = \frac{C^2}{Ax+C}$.

- a quantidade de leite na colher é $c\,\frac{Ax}{Ax+C} = \frac{AxC}{Ax+C}$. (1)

A quantidade de leite na colher é exatamente a quantidade de leite que será colocada na xícara de café, ou seja, a quantidade de leite na xícara é $c\,\frac{Ax}{Ax+C}$.

A quantidade de café que permanece no copo é o que tinha (c) menos o que retiramos $\left(c\,\frac{C}{Ax+C}\right)$:

$$C - C\frac{C}{Ax+C} = \frac{C(Ax+C)-C^2}{Ax+C} = \frac{AxC}{Ax+C} \qquad (2)$$

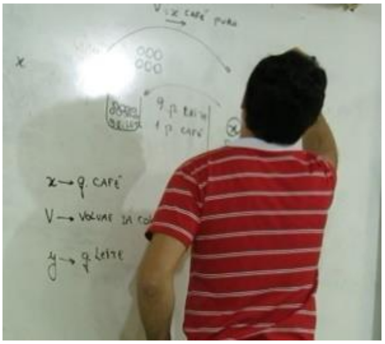
Portanto, como (1) = (2), **concluímos que a quantidade de café no copo de leite é igual à quantidade de leite na xícara de café.**

É importante destacar que a solução se mantém válida ainda que A seja qualquer número real, não necessariamente próximo de 6. **De fato, a relação entre o tamanho do copo e da xícara não interfere na solução do problema e os alunos devem ser conduzidos para essa conclusão**.

5- Uma solução com uso de analogia discreta (caso particular):

A dificuldade de entendimento do problema por alguns professores inspirou o professor Roger a elaborar uma compreensão discreta (Figura 7). Registramos que a solução dada por esse professor não é adequada matematicamente em face do uso de meios discretos para explicar algo de natureza contínua (medida de capacidade). No entanto, essa explicação foi determinante para auxiliar os que ainda careciam de convencimentos sobre o que, de fato, era um dado para o problema e o que deveria merecer atenção no texto para elaboração de estratégia e uso na resolução.

Figura 7. Apresentação de solução discreta do Prof. Roger.

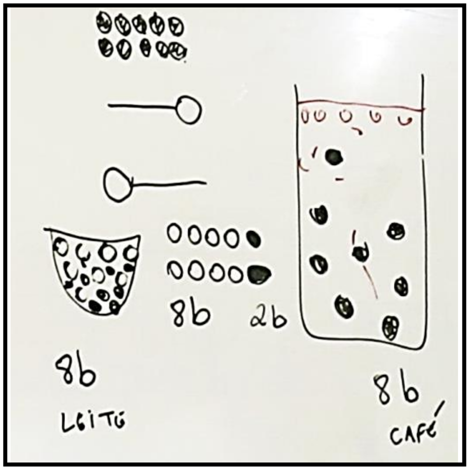


Entendemos que analogias são bem-vindas quando estabelecem uma ponte entre algo conhecido e o desconhecido. É o caso do uso da analogia da água (algo concreto) para se compreender a corrente elétrica (algo não concreto). Na situação do problema, professor Roger representou o café com círculos pintados de preto (chamados de “bolinhas pretas” ou “bolinhas de café”) e o leite com círculos brancos (chamados de “bolinhas brancas” ou “bolinhas de leite”).

Iniciou transportando “10 bolinhas de café” para o copo de leite[23]. Logo após, devolveu “8 bolinhas de leite” mais “2 círculos de café” para a xícara (Figura 8). Concluiu que restaram “8 bolinhas de café” no copo de leite e foram transportados “8 bolinhas de leite” para a xícara. A simplicidade de sua explicação foi decisiva para que alguns professores avançassem em suas estratégias e formulassem as suas próprias dali por diante.

[23] A escolha da quantidade de bolinhas pelo professor foi uma opção aleatória, podendo ser qualquer outra.

Figura 8. Solução discreta.



Naquele momento, havia algo mais importante do que o respeito às regras matemáticas – a compreensão do problema. Sem a compreensão, nenhuma regra teria valor e a aula poderia se transformar na simples transmissão de informações vazias, ao invés de estimular o raciocínio dos alunos.

Apresentadas as cinco estratégias, os professores se envolveram em uma importante discussão sobre a viabilidade de trazer ao primeiro plano na turma do 8º ano a discussão sobre o *cerca de*, mostrando que a relação entre capacidade do copo e da xícara, verdadeiramente, não influenciavam na solução do problema.

Maria Alice Se tivéssemos tempo na aula, (acho que não teremos) poderíamos fazer com os alunos uma solução com a relação entre capacidades do copo e da xícara de cinco vezes, seis vezes e também *n* vezes. É uma maneira de levá-los à generalização.

Aline — Os alunos têm uma resistência muito grande à generalização e isso me preocupa.

Bruna — Mas, inicialmente, nós aqui também tivemos essa resistência e o processo fluiu naturalmente.

Aline — Quando colocamos álgebra nos problemas, os alunos desistem de tentar entender. Eles criam um bloqueio.

Roger — Se apresentarmos na turma aquela solução mais geral, talvez um ou dois vão entender.

Bruna — Uma possibilidade é como Maria Alice disse, apresentar as soluções particulares e, ao final, generalizar.

Julia — Mas essa é a maneira como o processo aconteceu aqui também. Não começamos pela solução geral. Ela foi construída como aprimoramento das outras.

A professora Aline insistiu que os alunos tendem a esquecer tudo o que fizeram e acertaram, ficando com a impressão de que se trata de uma questão difícil. Mas, o grupo tentou convencê-la de que a generalização é importante, se não o aluno pode ficar com a impressão errada de que aquela solução numérica com uma proporção fixa entre copo e xícara é correta, quando, na verdade, não é.

Roger — Pensando bem, estamos colocando números aleatórios.

Aline — Eu concordo em colocar que a capacidade de um recipiente é *x* e do outro *6x*. Isso é uma generalização, na

	medida em que não estou mais com casos particulares. Isso eu concordo.
Julia	Mas, embora seja mais geral que atribuir números, existe um erro de interpretação nessa solução. Ela não dá conta do *cerca de* que aparece no enunciado. As capacidades do copo e xícara devem ser x e Ax.
Aline	Mas são muitas variáveis!
Maria Alice	Eu acho importante plantar essa sementinha nos alunos.
Donato	Concordo com isso. No primeiro contato, o aluno vai ter dificuldade, é natural. Com o amadurecimento ele vai conseguir entender cada vez mais fácil. Não podemos esconder isso dos alunos, temos que mostrar isso a eles.

A professora Maria Alice ressaltou que deixar a solução apenas no caso particular é não completar o ciclo de solução do problema, induzindo o aluno a pensar que só o numérico é suficiente para resolvê-lo. Professor Roger apresentou uma preocupação sobre a forma como ele deveria trabalhar a generalização. Ele gostaria de induzir os alunos a esse pensamento, ao invés de apresentar uma forma pronta. Os professores argumentaram que o tempo é curto e eles não têm experiência com generalizações. Ficou definido, todavia, que deveriam estar presentes na aula duas soluções numéricas, com números distintos e, pelo menos, uma solução não numérica, com a capacidade do copo ser seis vezes a da xícara. Isso deve ser feito com a participação ativa dos alunos. O caso ainda mais geral, com uma proporção qualquer entre recipientes não será trabalhado em razão do tempo. Em uma aula posterior, o professor pode (e deve) apresentar esse caso.

AVALIAÇÃO

O grupo decidiu entregar aos alunos uma folha contendo duas questões, ao final da aula. Na primeira, eles deveriam registrar como verdadeiras ou falsas as afirmações relativas ao texto do problema, objetivando investigar sua compreensão. Na segunda, os alunos seriam solicitados a resolver individualmente o problema, recebendo-o, novamente, por escrito. A professora Maria Alice elaborou um instrumento para avaliar, individualmente, o desempenho dos alunos, tanto na compreensão do texto quanto no raciocínio matemático. O grupo validou o instrumento declarando estar em sintonia com os objetivos da aula, ou seja, verificar a compreensão textual do problema e resolvê-lo. Essa atividade é apresentada a seguir:

Suponha que você tenha uma xícara cheia de café do respectivo e saborosíssimo líquido negro e um copo alto cheio de leite, cerca de 6 vezes o tamanho da xícara. Mergulhe uma colher de chá na xícara de café e despeje o seu conteúdo no copo de leite. Depois, volte a mergulhar a mesma colher no copo que agora tem a mistura e devolve-a à xícara de café. Completada essa operação, qual destas afirmações está certa?

1) Há mais café no copo de leite do que leite na xícara de café.

2) Há tanto café no copo de leite quanto leite na xícara de café.

3) Há mais leite na xícara de café do que café no copo de leite.

Parte I: De acordo com o texto acima, escreva para cada item com V para frases Verdadeiras e F para frases Falsas:

( ) A palavra "respectivo" tem a ver com o café.
( ) Diferentes colheres de chá têm sempre a mesma capacidade e/ou o mesmo tamanho.
( ) O fato de o copo ter cerca de 6 vezes o tamanho da xícara não significa que os volumes sejam diferentes.
( ) Tamanho é o mesmo que quantidade.
( ) Houve duas operações de transporte de café.

Parte II: Resolva o problema e declare a alternativa correta.

Na Parte I, o aluno deveria marcar, de cima para baixo, as opções V F F F V. Na Parte II esperava-se que o aluno apresentasse uma solução correta para o problema, declarando a alternativa "Há tanto café no copo de leite quanto leite na xícara de café" como correta.

O grupo destacou que, além do instrumento, as próprias observações do professor durante o processo são também importante avaliação e devem ser levadas em conta. Ao circular entre os grupos, o professor poderia/deveria avaliar o processo de construção do conhecimento pelos alunos e corrigir distorções, se fosse o caso, por meio de questionamentos que os reconduzisse para um raciocínio que os levasse à solução do problema. Igualmente, o *neriage* também poderia/deveria fornecer elementos que permitissem que o professor verificasse se a linha de pensamento convergia para a solução. Caso houvesse divergência, o professor deveria interferir, fazendo do erro uma estratégia didática ou uma oportunidade de aprendizagem, tal como defendem os japoneses[24].

[24] Fernandez; Yoshida (2004), Isoda; Olfos (2009).

A AULA

Com o planejamento em mãos e bem estudado por todos, era hora de executá-lo. Prof. Roger foi eleito pelo grupo para ministrar a aula, enquanto os outros observavam-na sem interferir (Figura 9). Eles estavam posicionados no fundo e na lateral da sala, de modo a não se misturar entre alunos e professor regente. Essa era uma preocupação do grupo para que os alunos se sentissem mais à vontade durante a aula. Os professores-observadores tinham o compromisso de acompanhar a aprendizagem dos alunos pelos seus discursos, gestos, olhares ou qualquer modo que expressasse a apreensão ou não do conhecimento, tomando notas que foram objeto de reflexão em momento posterior à aula.

Figura 9. Professores observando a aula do Prof. Roger.

A aula aconteceu em dia destinado à Formação, o que permitiu que o grupo de professores estivesse todo presente. Como este era um dia em que Roger não atua na sala de aula, o prof. teve a aula cedida por um colega para que pudesse desenvolver o Problema do Café com Leite.

Roger iniciou a aula pedindo que os alunos lessem o problema individualmente. Em seguida, organizou-os em grupos e pediu que um deles lesse em voz alta para a turma. Logo após, questionou-os sobre palavras, expressões ou trechos que tivessem causado dúvidas.

Roger[25]	Vocês entenderam o enunciado do problema? Tem algum termo que vocês não conhecem? [...] Vocês entenderam tudo direitinho?
Aluno 1	Se a xícara está cheia e o copo está cheio, quando mergulhar a colher, o líquido irá transbordar.

Essa dúvida surgiu no momento do planejamento e Roger explicou conforme combinado. Ele encheu um copo até a borda e perguntou se o copo estava cheio. Em seguida, retirou pequena parte do líquido do copo e voltou a perguntar se estava cheio. Todos responderam que sim e concluíram que dizer que o copo está cheio não quer dizer que ele esteja cheio até a borda.

Neste contexto, um copo cheio, não significa estar cheio até a borda.

Os alunos compreenderam essa expressão no enunciado e perceberam não ocorrer o transbordamento ao mergulhar a colher no copo ou

[25] Os diálogos retratam fielmente as ideias apresentadas pelos participantes do *Lesson Study*, mas não *ipsis verbis*, ou seja, não exatamente com as mesmas palavras.

na xícara. Isso os levou a desconsiderar esse fato para a solução, até porque, professora Maria Alice mencionou que se o líquido transbordasse e se esse fato fosse importante para a solução, não se teria controle sobre esse derramamento, uma vez que a colher de chá poderia ter diferentes tamanhos.

Os alunos não apresentaram mais dúvidas e Roger continuou a verificar a compreensão, perguntando...

Roger Vocês entenderam o que quer dizer "respectivo"?

Turma Não...

Roger Por que vocês não perguntaram? O "respectivo" vem logo após "xícara de café", certo? O "respectivo líquido negro" se refere ao café.

Turma Hummm!

Professor Roger ainda desejou saber se haveria alguma dúvida sobre o tipo e tamanho da colher (Figura 10). Essa parte do enunciado não interferia na solução e era importante que os alunos refletissem sobre a possibilidade dessa influência.

Figura 10. Tamanho da colher.

Roger	A colher de chá se refere à quantidade. Quando falamos em colher de sopa, colher de café, colher de sobremesa e colher de chá, queremos, na verdade, falar da capacidade aproximada da colher.

O professor continuou a verificação da compreensão textual do enunciado do problema perguntando...

Roger	E quanto ao copo ser cerca de seis vezes o tamanho da xícara?
Turma	Porque é maior... Por exemplo, a xícara tem 100 ml... e o copo (faz um gesto mostrando que o copo é mais alto)...
Roger	Na altura? Tem diferença ser seis vezes na altura ou no volume?

Após essa conversa, Roger pediu que cada grupo discutisse uma estratégia para a solução do problema. Ele visitava os grupos questionando-os e indicando caminhos para a elaboração do raciocínio, , como mostra a Figura 11. Nesse momento, Roger já conhecia as dúvidas, obstáculos, facilidades e outros ingredientes que serviram de base para sua posterior interferência.

Figura 11: Prof. Roger visitando os grupos de alunos.

No caso do Problema do Café com Leite, Roger percebeu a tendência de seus alunos atribuírem importância para partes do enunciado que não os levaria para a solução, como por exemplo o fato de o copo ser 6 vezes maior que a xícara.

A seguir, Roger pediu que os grupos apresentassem para a turma o que entenderam e como pensaram resolver o problema. Essa etapa é necessária para que o *neriage* aconteça no método japonês. Esse método defende a importância do compartilhamento das ideias por todos e para todos, seguido de uma síntese, com o intuito de alcançar uma conclusão coletiva. Esse compartilhamento promove integração e ampliação do repertório de estratégias que poderão fertilizar o raciocínio ou o processo de solução de outros problemas.

A discussão deve envolver muito mais os alunos do que o professor. Roger se posicionou como um mediador, um promotor e um organizador de ideias, seguindo as orientações do *Lesson Study* e do próprio plano de aula.

Alguns grupos afirmaram haver mais leite na xícara do que café no copo de leite. Esses alunos estavam apoiados na diferença de capacidade dos recipientes ou do volume dos líquidos, equivocadamente. Provavelmente, deixaram-se levar pelas quantidades diferentes de líquido em cada recipiente. Acompanhemos o raciocínio de um desses grupos:

As alunas encheram um copo com leite e uma xícara com café. Levaram uma colher de chá cheia de café e derramaram no copo de leite.

Grupo das alunas	Como o leite está em maior quantidade, não vai aparecer o café.

Depois encheram uma colher com a mistura de café com leite do copo e derramaram na xícara de café. O líquido da xícara ficou marrom e não mais negro como antes.

Elas declararam:

Grupo das alunas	Ficou menos café no copo de leite porque o leite está em maior quantidade. Quando enchemos a colher com o líquido que veio do copo, ele não veio puro, somente com leite.

Nesse momento um aluno respondeu que o problema não havia mencionado que os dois líquidos deveriam ser misturados. Para ele, o café poderia ter ficado concentrado em algum lugar no copo de leite e, por isso, o líquido que voltou para a xícara poderia ter diferentes concentrações de café, a depender do local que a colher tivesse sido mergulhada no copo.

Essa dúvida não havia sido prevista no planejamento da aula, mas Roger estava seguro dos caminhos que deveria tomar para conduzir o raciocínio dos alunos.

Roger	Misturando ou não, faz diferença?

Esse aluno e o grupo de alunas ainda se baseavam em fatos que não os levariam à solução do problema, ou seja, na concentração e na diferença de quantidade de líquido nos recipientes, respectivamente. Roger questionou-os tentando fazê-los ver que aqueles fatos eram irrelevantes para a solução do problema:

Roger	Colocando menos ou mais café, faz diferença?

O aluno ficou pensativo e o grupo de alunas declarou:

Grupo de alunas	Professor, há mais leite na xícara de café do que café na xícara de leite, porque o conteúdo de leite é bem maior do que o de café.

A explicação das alunas reforçou o raciocínio baseado nas diferentes quantidades de líquido em cada recipiente.

Roger continuou estimulando o entendimento da turma com perguntas do tipo:

Roger	Quando vocês colocaram café no copo de leite, qual a quantidade de café? Se o líquido da colher não estava mais puro, o que veio na colher? Vocês precisam saber qual é toda a quantidade de leite no copo? E de café na xícara?
Grupo de alunas	Precisamos saber a quantidade de leite e de café na colher e não no copo e na xícara.

Nesse momento, apesar de a pergunta do problema ter sido formulada na quantidade de café no copo e de leite na xícara, esse grupo entendeu que o foco estava no líquido da colher que foi e que voltou. Imediatamente, outro grupo pediu para mostrar seu modo de pensar. Esse grupo tinha como membro o aluno que havia levantado a hipótese de o café estar concentrado no leite.

Eles iniciaram levando e trazendo o líquido na colher como o grupo de alunas havia feito, mas ficaram confusos porque a explicação deles continha quantidades. Decidiram ir para a lousa (Figura 12).

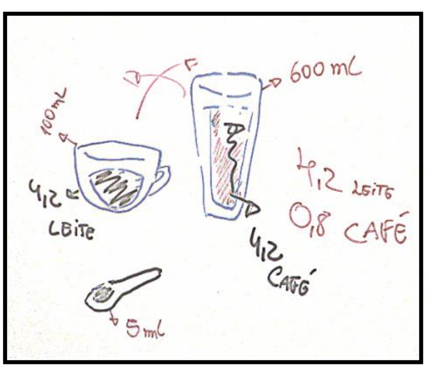
Figura 12. Grupo de alunos explicando sua solução para a turma.

Grupo de alunos Professor, vamos mostrar em um desenho. Na colher cabem 5ml, na xícara, 100ml e no copo, 600ml. Levaremos 5ml de café para o copo de leite. Então, ficará uma parte do café concentrada no leite. Lá no problema não fala que tem de ser misturado.

Depois, vamos levar o leite e um pouco de café. A quantidade de café é pouca.

A solução dos alunos está apresentada na Figura 13.

Figura 13. Solução de um grupo de alunos.



Roger	Qual é a quantidade que vocês imaginaram voltar para a xícara?
Grupo de alunos	Vamos voltar com 4,2ml de leite e 0,8ml de café.
Roger	Por que vocês colocaram mais leite do que café?
Grupo de alunos	Porque tem mais leite no copo do que café! Quando levamos o café para o leite, a xícara ficou com 95ml e o copo com 605ml. Professor, é difícil explicar, mas nós achamos que as quantidades são as mesmas...

Esses alunos consideraram a separação do café e do leite no copo para apoiar a representação do líquido que ia e vinha na colher. É claro que a mistura do café no leite é homogênea, mas o artifício da separação os levou à solução do problema.

Roger não questionou esses alunos sobre a homogeneidade do líquido do copo por perceber que a hipótese da separação favoreceu, de algum modo, o raciocínio. A atribuição de valores numéricos às quantidades de cada líquido na colher fez com que entendessem o que realmente estava a ocorrer.

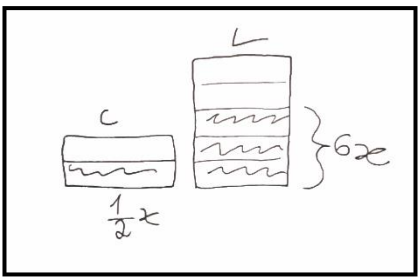
O grupo continuou defendendo seu modo de pensar.

Grupo de alunos	Veja, ficaram 4,2ml de café no copo e foram 4,2ml de leite para a xícara... então, a quantidade de café no copo é a mesma de leite na xícara! Foi isso o que entendemos...

Roger perguntou se todos concordavam com a explicação daquele grupo de alunos. O primeiro grupo que apresentou a solução não concordou por ainda estar apoiado no fato de haver mais leite no copo do que café na xícara. Roger continuou levando a turma a pensar por meio de questionamentos, quando um terceiro grupo pediu para mostrar o que havia pensado.

Esse grupo representou a xícara de café ("C" - à esquerda na figura abaixo) e o copo de leite ("L" - à direita) em retângulos subdivididos. As partes foram rotuladas como frações de um inteiro denominado "x". O início da solução está na Figura 14.

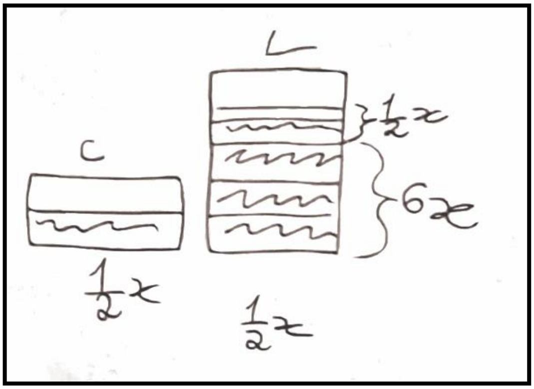
Figura 14. O início da solução por outro grupo de alunos.



Importante notar que este grupo de alunos parece ter levado em conta o fato de o copo ser 6 vezes o tamanho da xícara, como informou o texto do problema, ao adotarem o "6x" representando o líquido do copo. Entretanto, não houve coerência matemática com a fração representada na xícara de café ($\frac{1}{2}x$).

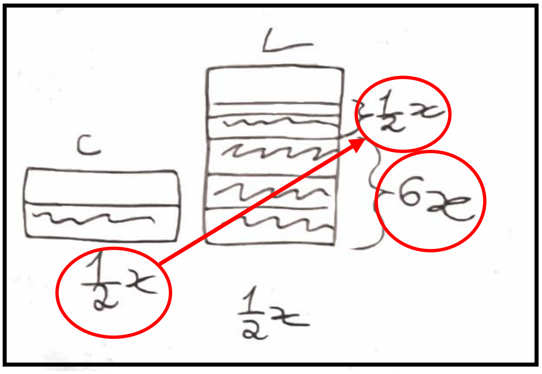
Na verdade, eles estavam preocupados em transferir $\frac{1}{2}x$ do líquido da xícara para o copo de leite, como destaca a Figura 15. O erro na representação dos alunos, segundo os dados do problema, não interferiria na solução porque, de fato, o tamanho dos recipientes não era importante.

Figura 15. Segundo passo na solução: movendo líquidos.



O uso da linguagem matemática parecia ainda estar confusa para esses alunos (Figura 16). Essa poderia ter sido uma oportunidade valiosa para revisão desse conteúdo matemático (equações) com perguntas do tipo: "O que "x" está representando no seu desenho?" Roger não valorizou tal momento e o planejamento não previu essa possibilidade. Concluímos que esse ponto deveria ser levado para a reflexão dos professores para futuro replanejamento.

Figura 16. Parte- todo?

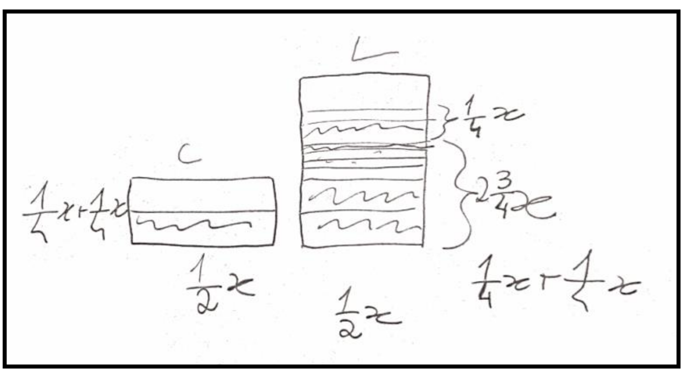


O grupo considerou haver metade do conteúdo da colher de café e metade de leite. Roger os questionou:

Roger	Quando vocês escreveram ¼, vocês estão considerando metade leite e metade café? ¼ é metade de ½, certo? Vocês acham que volta metade de café para a xícara?
Um aluno fora deste grupo	Eu acho que não porque há mais leite do que café.
Roger	Então, a melhor representação não seria de ¼ e ¼? Seriam outras quantidades? Mudaria alguma coisa? E se ao invés de ¼ fosse 1/6 ? E 1/8? Se voltasse 1/8 de café, quanto voltaria de leite?

Os alunos deste grupo não souberam responder aos questionamentos de Roger, mas com base em sua resolução (Figura 17), declararam que a quantidade de café no copo é a mesma de leite na xícara.

Figura 17. Solução final do grupo.



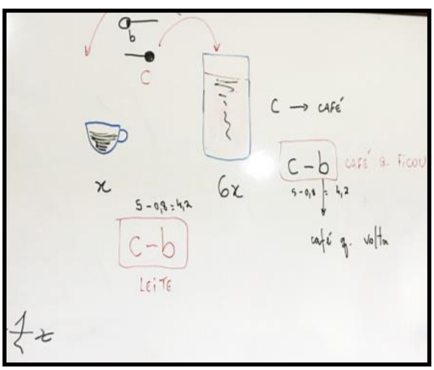
A turma respondeu que a solução deste grupo estava bagunçada. Roger quis saber quantos ainda não haviam alcançado a solução correta do problema, perguntando:

Roger Quem concorda com a solução do primeiro grupo? Quem concorda com a solução do segundo grupo? E do terceiro?

Alguns alunos concordaram com o primeiro grupo, outros com o segundo. Roger concluiu que ainda existiam alunos com dúvidas e decidiu discutir com a turma as estratégias planejadas e que não foram abordadas por ele na aula.

Roger optou por abordar a estratégia de número 5 associada a elementos genéricos da estratégia de número 4 do planejamento, uma vez que um dos grupos de alunos havia apresentado a de número 2, ainda que com menor variedade de detalhes, mas, igualmente válido. Essa solução é apresentada na Figura 18.

Figura 18. Professor Roger organizando as ideias.



Com a proximidade do término do tempo de aula, Roger optou por reforçar o entendimento já declarado pela turma – **há tanto café no copo de leite quanto leite na xícara de café**. Usou os últimos quatro minutos para abordar a estratégia 5 integralmente. Os alunos demonstraram compreensão pelas respostas que forneciam aos questionamentos do Roger.

AVALIAÇÃO

Não houve tempo dentro dos 100 minutos de aula para a aplicação da avaliação individual, que foi levada a efeito na aula imediatamente posterior, gentilmente cedida pela professora que a ministraria e que, ao invés do conteúdo programado, aplicou a avaliação nos 15 minutos iniciais de sua aula. Destacamos que o grupo não tinha tempo para aplicar a avaliação e, em seguida, reunir-se para a reflexão, de modo que privilegiamos o debate.

As avaliações foram apresentadas posteriormente ao grupo de professores, mas a discussão coletiva sobre isso não foi realizada, o que foi uma perda. Apesar disso, apresentamos algumas inferências sobre as soluções dos alunos.

Sobre a compreensão do problema, todos os 13 alunos marcaram corretamente 4 das 5 afirmações:

(V) A palavra "respectivo" tem a ver com o café.
(F) o fato de o copo ter cerca de 6 vezes o tamanho da xícara não significa que os volumes sejam diferentes.
(F) Tamanho é o mesmo que quantidade.
(V) Houve duas operações de transporte de café.

No entanto, 11 alunos consideraram a segunda frase, verdadeira, mas era falsa:

(V) diferentes colheres de chá têm sempre a mesma capacidade e/ou o mesmo tamanho.

De fato, se estamos em um ambiente culinário, por exemplo, consideramos a capacidade de uma colher de chá como sendo 15 ml. Mas no dia a dia, colheres de chá têm tamanhos variáveis, o que pode ter causado alguma confusão para os alunos, demonstrando que esse é um ponto que deveria ser revisto em um replanejamento para uma reaplicação, o que só foi percebido após a análise da avaliação escrita dos alunos. Em especial, o professor mostrar colheres de chá, sobremesa e sopa na aula pode ter contribuído para essa dúvida dos alunos.

Na Parte II, todos os alunos marcaram corretamente a alternativa "há tanto café no copo de leite quanto leite na xícara de café", mostrando sintonia com o que demonstraram compreender durante a aula, sem, no entanto, apresentar a solução matemática. A ausência do uso da linguagem matemática para a solução do problema pode ter sido causada por falhas na proposição da avaliação escrita, uma vez que o comando da questão solicitava que resolvessem o problema e declarassem a alternativa correta. Como eles já haviam resolvido em sala o problema, restou-lhes declarar a alternativa correta. Esse fato nos remete a um cuidado maior na elaboração da avaliação no momento do planejamento.

O QUE DEU CERTO... O QUE NÃO DEU CERTO... UM BALANÇO FINAL

Entendemos que há duas questões a serem consideradas aqui. Uma é inerente ao *Lesson Study* e compõe a etapa de reflexão pelo grupo de professores sobre o planejamento e a execução da aula. A outra refere-se à própria Formação Continuada. Passamos então à discussão de cada uma delas.

REFLEXÃO DO PLANEJAMENTO E EXECUÇÃO PELO GRUPO

Terminada a aula do Prof. Roger, o grupo de professores se reuniu em uma outra sala da escola para conversar sobre a experiência vivida, caracterizando a terceira etapa do *Lesson Study*, a reflexão (Figura 19). Ressaltamos que, assim como a observação de aula pelo grupo, a reflexão só foi possível uma vez que esse era um dia destinado à Formação e que, portanto, os professores não tinham pressa em voltar para suas salas de aula.

Figura 19. Reflexão sobre a aula.

O grupo de professores constatou que de um modo geral, a execução da aula esteve em sintonia com o planejamento e mostrou-se favorável aos estímulos que desejava empreender sobre os alunos: organização do raciocínio, desenvolvimento da autonomia, construção de representações matemáticas, atenção aos textos do problema, apropriação de diferentes estratégias, para falar de alguns dos principais ingredientes. Mas apontaram algumas observações sobre questões que merecem melhorias.

Como foi exposto na execução da aula, os professores constataram que o tempo de aula de 100 minutos não foi suficiente para a execução de todo o planejamento. Com isso, a avaliação individual dos alunos careceu de tempo extra para sua aplicação e não pode ser analisada pelo grupo de professores. Sobre a solução matemática do problema, ressaltaram que as estratégias 1, 3 e 4 não foram integralmente debatidas, destacadamente o incentivo à solução genérica.

Nesse momento, o grupo poderia decidir por uma nova rodada de planejamento-execução-reflexão, avançando na Espiral do *Lesson Study*, mas avaliaram, com base em suas observações, que a aula foi proveitosa, que os alunos estiveram o tempo todo engajados na atividade e por suas reações e respostas individuais durante a aula perceberam que entenderam o problema. Sentiram-se satisfeitos e declararam que a aula foi boa.

A reflexão seguiu as diretrizes de um instrumento denominado Avaliação da Qualidade do Ensino em Resolução de Problemas [26] (QAIPS) que reúne especificidades a serem observadas por professores

[26] Originalmente, *Quality Assessment of Instruction in Problem Solving* (Souza; Wrobel; Gaigher, 2017).

quando do planejamento e execução de aulas desse tipo, recomendadas por investigadores da área que se debruçaram sobre a formação inicial e continuada de professores de Matemática, a resolução de problemas e o *Lesson Study.*

SOBRE AS AÇÕES DA FORMAÇÃO

Do ponto de vista da dinâmica das atividades, é importante destacar, mais uma vez, que os encontros de Formação Continuada aconteceram em um momento em que os professores de Matemática estão fora da sala de aula, em carga horária destinada ao planejamento de atividades, permitindo que pudessem se ausentar de suas escolas para essa participação. Alguns professores relataram que muitas formações lhes são oferecidas, mas poucas investem na Matemática e muitas não conversam com suas práticas de sala de aula, ao contrário da experiência que vivenciaram e que relatamos neste livro. Eles se sentiram envolvidos no processo, como verdadeiros protagonistas, vivenciando a formação e não apenas recebendo informação. Toda a construção da aula foi realizada por eles, o que justificou o interesse em conhecer e em permanecer neste curso.

Os professores ao avaliarem o processo de Formação Continuada relataram que nunca haviam pensado tão profundamente em muitas das questões que trouxemos, por exemplo apresentar várias estratégias de solução para os alunos e porquê fazer isso ou aquilo. Alguns deles mostraram-se receosos com a aula que estavam planejando. Diziam que os alunos não estão acostumados a resolver problemas. E cá para nós: nunca estarão acostumados se nós professores não os incentivarmos. Este é um processo que deve ser conquistado e quanto mais estimularmos nossos alunos a pensar e encarar situações não previstas, como resolver um problema mal estruturado, melhores eles serão.

Os professores elogiaram o planejamento colaborativo, pois a sala de aula traz isso: diversidade de pensamentos, compreensões, estratégias e bagagens matemáticas. O pensar coletivo se aproxima dessa sala de aula de uma maneira que o professor, sozinho, teria muito mais dificuldade em planejar a aula e prever reações e respostas dos alunos. Aliás, eles confessaram que, muitas vezes, sequer planejam as aulas, pois com os anos de prática já sabem lidar com muitas situações, ou pensam saber. Mas reconhecem a importância do planejamento, em especial, no Problema do Café com Leite, para direcionar a aula para o que foi proposto, sem perder o foco, para ampliar o repertório de estratégias dos alunos e para trabalhar a compreensão do texto. Muitos jamais tinham pensado sobre isso. Destacamos uma fala da prof. Maria Aparecida que vai ao encontro ao que nós, autoras, pensamos: "o ganho muito maior é do aluno, da sua aprendizagem, quando nós estamos bem preparados para isso". Afinal, todo esse processo de Formação tem como objetivo maior a aprendizagem do aluno.

Os professores falaram, outrossim, que nunca haviam pensado sobre seus questionamentos durante as aulas. Agora passaram a perceber que eles mesmos respondiam às suas próprias perguntas, sem permitir que os alunos pensassem. Do mesmo modo, entenderam que certas perguntas eram amplas e bloqueavam o fluxo de raciocínio dos alunos ao invés de auxiliá-los. Todos relataram ao final da Formação, que estão se policiando nessas questões e identificam momentos que devem reformular seus protocolos verbais. Eles citaram, ainda, que todos os professores deveriam ter acesso a essas informações e formações, pois essa experiência lhes permitiu uma visão de aula, de trabalho, de profissional da educação que eles jamais haviam pensado.

Uma fonte de preocupação do grupo, e acreditamos que seja dos leitores também, era sobre o momento de observação da aula. De fato, entendemos que essa é uma importante dificuldade em se implementar o *Lesson Study* no Brasil. De um lado, os professores mostraram-se resistentes em ter colegas assistindo suas aulas e temos aqui uma questão claramente cultural. Eles têm medo de se expor, de serem julgados, o que limita, inclusive, algumas participações mais ativas no planejamento coletivo. E, verdadeiramente, não é esse o ponto. Estamos querendo melhorar nossas práticas e pensar coletivamente em um ensino de qualidade para nossos alunos. Nesse processo, todos contribuem. Não há mal professor e nem há culpas, pois a avaliação não é, e nem deve ser, fonte de punição, de controle, mas de aprendizado constante. Essa discussão precisa ser fomentada.

Maria Alice	Como você se sentiu com tanta gente assistindo a sua aula?
Roger	No início fiquei um pouco nervoso, hesitando um pouco. Mas tentei me envolver com a aula e focar nos meus alunos, então a presença de professores-observadores ficou em segundo plano. Concentrei na aula e me desliguei de quem estava em volta. Assim me senti mais à vontade.

Uma segunda questão é técnica, pois as salas de aula brasileiras não estão preparadas para receber tantos professores-observadores em seus espaços físicos limitados. E a terceira questão foi a preocupação do grupo com a possível insegurança dos alunos com tantos professores em sala. Em um primeiro momento, os alunos ficaram curiosos com as câmeras e pessoas estranhas na sala. Mas isso durou pouco tempo. Rapidamente esqueceram o cenário e se comportaram como de costume, desenvolvendo suas atividades com a naturalidade do dia a dia. O próprio professor confirmou isso:

Hellen	Você acha que os alunos se sentiram incomodados com a presença de outros professores assistindo a aula?
Roger	Eu acho que só no início. Depois que eles se envolveram com o problema, a atenção passou a ser o próprio problema. Eu os percebi bem à vontade, como se estivéssemos no nosso contexto diário, eu com eles.

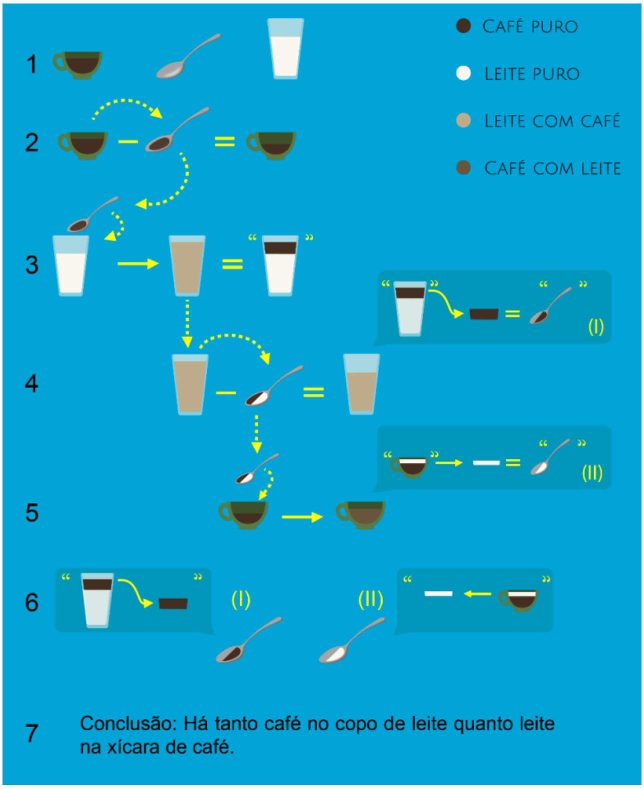
Destacamos que os professores se mostraram comprometidos e motivados durante todo o processo, sentindo-se provocados e contribuindo para alcançar nosso objetivo de discutir sobre Resolução de Problemas matemáticos e mostrar a potencialidade e viabilidade de se trabalhar de modo colaborativo usando o método *Lesson Study* em salas de aulas brasileiras. Eles nos solicitaram a continuidade da Formação e, assim, formamos a segunda turma, agora com 27 professores (10 destes veteranos) a trabalhar um novo problema. Poder dar andamento ao processo, e ainda contar com mais que o dobro de professores, é indício de que estamos no caminho certo. Na segunda formação, trabalhamos com o problema "Onde Morar", assunto do volume 2 da série *Lesson Study*. Dessa forma, ainda que timidamente, começamos um movimento no sentido de inserir o *Lesson Study* nas escolas capixabas, quiçá brasileiras.

Concluímos dizendo que por todas essas reflexões e ponderações provocadas nos professores, utilizar o *Lesson Study* como método de Formação Continuada foi algo extremamente rico e valioso. Destacamos, nesse sentido, um relato do Prof. Roger sobre qual a maior contribuição do curso para ele: *pensar antes de fazer*. Finalizamos com os votos de que todos nós possamos pensar e repensar nossas práticas, de modo responsável, ainda que para isso tenhamos que ser subversivos[27].

[27] D'Ambrosio; Lopes (2015b).

SEM LIMITES

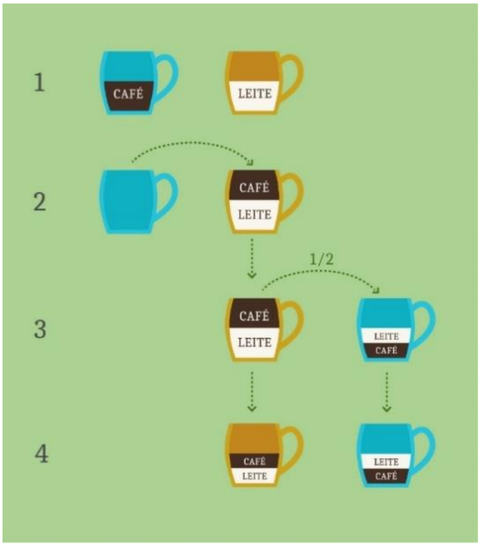
Para além dos limites da aplicação que deu origem a esse número da série *Lesson Study* na Matemática, é possível uso do mesmo problema para pessoas com qualquer bagagem matemática, a depender da linguagem usada e/ou do modo como explicamos. Essa é uma vantagem do uso de problemas mal estruturados, como explicamos no começo do livro. Como ilustração, segue uma proposta de solução que atende a esses requisitos, elaborada por dois colegas investigadores e engenheiros experientes na resolução de problemas, em conjunto com as autoras, MSc. Sotério Ferreira de Souza e MSc. Carolina Veiga Ferreira de Souza.



Por fim, é valoroso registrar outra alternativa proposta pelo Prof. Dr. Henrique Manuel Guimarães[28], em conversa sobre a solução com uso de analogia discreta eleita por um dos professores do grupo e apresentada como a quinta solução no subitem "Estratégias Matemáticas" do capítulo "O Planejamento Colaborativo (Kyozaikenkyu)" deste livro.

Inspirado nos ensinamentos de Pólya, Guimarães sugeriu que, em nova edição da aula, o grupo de professores poderia substituir a solução discreta (das bolinhas) pela de "caminhar pelos limites", ou seja, exagerar ao trabalhar com as mesmas quantidades de leite e café nos recipientes. Para demonstrar a indicação de Guimarães, elaboramos um esquema que segue abaixo. Iniciamos, em 1, com duas canecas, cada uma contendo as mesmas quantidades de café (caneca azul) e leite (caneca cor de caramelo). Em seguida, em 2, o café da caneca azul é totalmente transportado para a caneca cor de caramelo que contém o leite. Em 3, devolve-se para a caneca azul metade do café e metade do leite da caneca cor de caramelo. Em 4, é apresentada a caneca cor de caramelo com o líquido que restou e a caneca azul com o líquido que ganhou. A comparação dos líquidos de ambas as canecas demonstra a igualdade nas quantidades de café e leite em ambas.

[28] Dr. Henrique Manuel Guimarães é professor e investigador da Universidade de Lisboa – Portugal.



Essa indicação é uma alternativa matematicamente correta e possui o mesmo potencial de convencimento, podendo ser utilizada em aplicações futuras do problema (razão pela qual optamos por fazê-la constar neste livro).

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, 8(4), 7-10, 1989.

APM. *A renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. p.30, 1988.

BALDIN, Y. Y. O significado da introdução da metodologia japonesa de lesson study nos cursos de capacitação de professores de matemática no Brasil. In: XVIII Encontro Anual da SBPN e Simpósio Brasil-Japão, São Paulo - SP. *Anais...* 2009.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionai*s: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CYRINO, M. C. C. T.; CALDEIRA, J.S. Processos de negociação de significados sobre pensamento algébrico em uma comunidade de prática de formação inicial de professores de Matemática. *Investigações em Ensino de Ciências (Online)*, v.16, p. 373-401, 2011.

D´AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (Org.). *Ousadia Criativa nas Práticas de Educadores Matemáticos.* 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, 2015a.

D´AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. Insubordinação Criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. *Bolema. Boletim de Educação Matemática* (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 29, p. 1-17, 2015b.

FERNANDEZ, C.; YOSHIDA, M. *Lesson Study: a japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. New Jersey, EUA: Autores Associados, 2004. p.235.

FERREIRA, A. C. *Metagognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo* (Tese) Doutorado em Educação Matemática. Campinas, SP: FE/Unicamp, 2003.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.* Belo Horizonte- MG: Autêntica, 2004, p. 47–76.

FUJII, T. Implementing japanese lesson study in foreign countries: misconceptions reviewed. *Mathematics Teacher Education and Development*, v.16, n.1, p.2-18, 2014.

GAIGHER, V. R.; SOUZA, M. A. V. F. de.; WROBEL, J. S.; Planejamentos colaborativos e reflexivos de aulas baseadas em resolução de problemas verbais de matemática. *Vidya*, v.37, n.1, p.51-73, 2017.

GIRALDO, V. et al. Práticas docentes compartilhadas: reconhecendo o espaço da escola na licenciatura em matemática. *Educação Matemática em Revista (São Paulo),* v.49A, p. 52-60, abril, 2016.

HILL, H. C. et al. Measuring the Mathematical quality of instruction: learning mathematics for teaching project. *Journal for Mathematics Teacher Education*, v. 14, n.1, p.25-47, 2011.

IBIAPINA, I. M. L. M. *Pesquisa Colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimento*. Brasília-DF: Líder, 2008.

ISODA, M.; OLFOS, R. *El enfoque de resolucion de problemas*: en la enseñanza de la Matemática a partir del estudio de classes. Ediciones Universitarias de Valparaiso: Valparaiso, 2009.

LESTER, F. K.; GAROFALO, J. *Mathematical problem solving*: Issues in research. Philadelphia: The Franklin Institute Press, 1982.

MISKULIN, R. G. S. et al. Pesquisas sobre Trabalho Colaborativo na Formação de Professores de

Matemática: um olhar sobre a produção do PRAPEM/UNICAMP. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Org.). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática.* São Paulo: Musa Editora, 2005, p. 196-219.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. *An agenda for action.* Reston, VA: NCTM, 1980.

ONUCHIC, L. de L. R. et al (Org.). *Resolução de Problemas: Teoria e Prática.* São Paulo: Paco Editora, 2014.

PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. 2.ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, J. P. *Gestão curricular em Matemática*. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: APM, PP. 11-31, 2005.

PONTE, J. P. Formação do Professor de Matemática: perspetivas atuais. In: PONTE, J. P. (Org.) *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p.343-360, 2014.

ROSÁRIO, P., NÚÑEZ, J. C.; GONZÁLEZ-PIENDA, J. *Cartas do Gervásio ao seu Umbigo: Comprometer-se com o Estudar na Universidade.* Coimbra: Edições Almedina*, SA* 115, 2006.

SCHOENFELD, A. *Mathematical problem solving*. Elsevier, 1985.

SCHOENFELD, A. *Porquê toda essa agitação acerca da resolução de problemas?* In P. Abrantes, L. C. Leal, J. P. Ponte (Ed.). Investigar para aprender matemática. Lisboa: APM e Projecto MPT, p. 61-72, 1996.

SOUZA, M. A. V. F. de. A Produção de Significados e a Representação Mental na Solução de Problemas Mal-estruturados de Matemática. *Boletim GEPEM*, jan/jun.2012 n.60, 129-144, 2012.

SOUZA, M. A. V. F. de; GUIMARÃES, H. M. A formulação de problemas verbais de matemática: porquê e como. *Quadrante*, Lisboa, v. XXIV, n.2, 135-162, 2015a.

SOUZA, M. A. V. F. de; SOUZA, S. F. de. Enunciados verbais de problemas de matemática e representações mentais: uma discussão. *Educação & Linguagem*, v.19, n.1, 205-221, 2016.

SOUZA, M. A. V. F. de; GUIMARÃES, H. M. A resolução de problemas na educação em Matemática: uma conversa sobre ensino, formação de professores e currículo desde Pólya. *Ifes Ciência*, v.1, n.1, 109-136, 2015b.

SOUZA, M. A. V. F. ; WROBEL, J. S. ; GAIGHER, V. R. . Quality Assessment of Instruction in Mathematics Problem Solving Classes: an evaluative instrument. *Ifes Ciência*, v. 3, p. 143-172, 2017.

STERNBERG, R. J. *Psicologia Cognitiva*. Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 2000.

TAKAHASHI, A. Characteristics of japanese mathematics lessons. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics,* v.25, p.37-44, 2006.

VANDENBOS, G. R. (Org.). *Dicionário de Psicologia da APA*. Porto Alegre: Artmed, 2010. p.807.

WROBEL, J. S.; GAIGHER, V. R.; SOUZA, M. A. V. F.; LEITE, H. C. A. Inquiries in problem solving with contributions from lesson study. In: *Proceedings of PME 40*, v.1, p.341. Szeged: Hungary, 2016.

Todas as imagens e transcrições de áudios usados neste livro, bem como o uso do nome e imagem institucionais da Escola, Centro de Formação e Prefeitura foram devidamente autorizados por escrito.

MINICURRÍCULO DAS AUTORAS

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza é carioca, com pós-doutorado em Resolução de Problemas pela Universidade de Lisboa (2014), doutora em Psicologia da Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (2007), mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (2001), licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (1995). É professora do Instituto Federal do Espírito Santo desde 2008, onde trabalha, principalmente, na Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Tem interesse em ensino, pesquisa e extensão ligados à formação de professores que ensinam matemática, em resolução de problemas, *Lesson Study*, psicologia cognitiva ligada ao processo de pensamento matemático, aplicações estatísticas e matemáticas na área da Educação, Ciências, Matemática e Engenharias.

Julia Schaetzle Wrobel é carioca, doutora em Matemática Aplicada pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (2005), mestre em Matemática Aplicada pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2001), licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro (1998). É professora da Universidade Federal do Espírito Santo desde 2006, onde trabalha principalmente com a Licenciatura em Matemática. É coordenadora de Matemática do Projeto Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) na universidade. Tem interesse em questões relacionadas à formação de professores que ensinam matemática, em *Lesson Study* e em resolução de problemas.

A série *Lesson Study* em Matemática foi motivada pelo desejo de divulgar aulas de Matemática elaboradas sob as premissas do método japonês *Lesson Study* ou Estudo/Pesquisa de Aula na língua portuguesa.

Nesse espaço não pretendemos priorizar o trabalho com qualquer conteúdo matemático ou nível escolar. Pelo contrário, os diferentes objetos matemáticos surgirão naturalmente pela necessidade de seus usos e/ou para a solução de um problema, coerentemente ajustados, é claro, à bagagem matemática dos alunos.

O que se quer é propagar aos professores de Matemática o resultado de aulas planejadas-executadas-refletidas que poderão ser ponto de partida para suas próprias ações de ensino, deixando a cargo de sua criatividade, experiência e intuição avanços no Problema do Café com Leite, imprimindo, desse modo, sua marca pessoal, pois cada turma tem seu modo de ser e sentir o mundo, seu contexto e sua história.

Edifes