RELATOS DE XPERIÊNCIAS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

ALEXANDRE KRUGER
Organizador

Edifes

Relatos de Experiências de Professores de Matemática

ALEXANDRE KRUGER
(Organizador)

Relatos de Experiências de Professores de Matemática

Edifes
Vitória, 2018

Editora do Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
R. Barão de Mauá, nº 30 – Jucutuquara
29040-689 – Vitória – ES
www.edifes.ifes.edu.br | editora@ifes.edu.br

Produção editorial
Projeto Gráfico: Assessoria de Comunicação Social do Ifes
Revisão de texto: Roberta Patrocínio de Amorim
Diagramação e epub: Know-How Desenvolvimento Editorial
Capa: Romério Damascena
Imagem de capa: Shutterstock

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

R382 Dados internacionais de Catalogação na Publicação
Bibliotecária Rossanna dos Santos Santana Rubim – CRB6- ES 403

Relatos de experiências de professores de matemática / organizado por Alexandre Krüger Zocolotti. – Vitória, ES : Edifes, 2018.
110 p. : il.

Vários autores.
ISBN: 978-85-8263-355-7 (e-book).

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Professores de matemática – Prática de ensino. I. Zocolotti, Alexandre Krüger. II. Título.

CDD 22 - 510

Bibliotecária Rossanna dos Santos Santana Rubim – CRB6- ES 403

Sumário

Apresentação

Essa obra reúne uma série de relatos de trabalhos desenvolvidos por professores da Coordenação de Matemática – COMAT, do Campus Vitória do Instituto Federal de Ensino, Ciência e Tecnologia do Espirito Santo – Ifes.

Atualmente, a COMAT conta com um grupo de 30 professores, entre efetivos e contratados. Esse grupo de professores atende a diferentes demandas do Campus, desde o Ensino Básico até a Pós-Graduação. Se na década de 1980 a oferta de vagas da instituição estava restrita aos cursos técnicos, hoje, no Campus Vitória, encontramos cursos de Educação de Jovens e Adultos, cursos técnicos Integrados ao Ensino Médio, cursos técnicos destinados àqueles que já concluíram o Ensino Médio e cursos superiores em diferentes áreas, com destaque para cursos na área da Engenharia.

Além desses cursos, a COMAT também atende às demandas de um curso "gestado" em suas próprias dependências: o curso de Licenciatura em Matemática. Pensado e desenhado por integrantes dessa coordenação, o curso de Licenciatura em Matemática tem sido um espaço para pensar e promover a formação de professores de Matemática que procurem atender as questões relativas aos processos de ensino e de aprendizagem da disciplina.

Quanto à pós-graduação, alguns colegas da COMAT também atuam no programa de mestrado de Educação, Ciências e Matemática – EDUCIMAT. Por isso, não é raro encontrarmos pelo Campus Vitória mestrandos desse programa fazendo suas pesquisas sob a orientação de colegas dessa coordenação.

Esse grupo, de larga experiência e que trabalha em diferentes contextos, é que se apresenta para escrever este livro. Por questões de organização, optou-se por dividi-lo em duas seções: na primeira estão reunidos trabalhos ligados à área de Educação Matemática e na segunda foram colocados textos ligados à Matemática Aplicada.

Esperamos que as experiências aqui relatadas contribuam para novas aprendizagens.

Boa leitura!

Os autores

Conhecimentos relativos a números irracionais de uma turma de ingressantes na licenciatura em matemática

Geraldo Claudio Broetto

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

1 – Introdução

Os dados apresentados neste capítulo são um recorte da tese de doutorado do primeiro autor, orientada pelo segundo autor, cujos objetivos foram: i) diagnosticar as imagens conceituais de números racionais e irracionais trazidas por licenciandos ingressantes na matemática; ii) analisar as movimentações dessas imagens ao longo da pesquisa (BROETTO, 2016). Os dados foram coletados em uma turma de ingressantes na licenciatura em matemática do Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes – Campus Vitória, durante o ano de 2014. Na pesquisa foram analisados os dados da turma como um todo e de alguns alunos em particular, porém, neste trabalho, trazemos apenas os dados relativos àturma como um todo.

Três estudos foram realizados em Broetto (2016). O primeiro deles, que chamamos de pequeno estudo diagnóstico, foi empreendido com uma turma de licenciandos de matemática do 4° período no ano de 2012. Em 2013, realizamos um estudo exploratório com os licenciandos ingressantes naquele mesmo ano e, finalmente, em 2014, o estudo principal, do qual apresentamos os dados neste trabalho. As etapas do estudo principal foram: aproximação com a turma, observação, diagnóstico, intervenção pedagógica, avaliação e aplicação de questões de ética. No Quadro 1 apresentamos, além das etapas, os procedimentos e instrumentos utilizados. Reforçamos, contudo, que este relato é direcionado para a etapa de diagnóstico.

2 – Aspectos do conhecimento de números racionais e irracionais analisados

Os aspectos do conhecimento de números racionais e irracionais analisados foram: reconhecimento, definição, propriedade de densidade e a existência dos irracionais. No que se refere ao primeiro aspecto, é preciso discorrer brevemente a respeito do nosso entendimento do que seja o reconhecimento. Entendemos o reconhecimento como o estágio mais superficial, porém essencial, de qualquer conhecimento. É uma etapa necessária à construção do conhecimento, mas não é suficiente quando se almeja entender as relações e os porquês daquele conhecimento[1].

Quadro 1 – Etapas, procedimentos e instrumentos do estudo principal de Broetto (2016).

<table>
<tr><th>Etapa</th><th colspan="2">Procedimento</th><th>Instrumento</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Aproximação Com a Turma</td><td colspan="2">Discussão a respeito de concepções de matemática</td><td>“O que é matemática? ” (slides)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Apresentações</td><td>“Apresentação da trajetória acadêmica do pesquisador” (slides)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Aulas expositivas</td><td>Função exponencial</td></tr>
<tr><td>Inequações exponenciais</td></tr>
<tr><td colspan="2">Atividades em grupo</td><td>Números figurados</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conversas informais</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Observação</td><td colspan="2">Observação de aulas</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observação de apresentações de trabalhos</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Diagnóstico</td><td colspan="2" rowspan="2">Aplicação de questionários</td><td>Questionário Q1</td></tr>
<tr><td>Questionário Q2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Apresentações</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">Entrevista Inicial</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">Entrevista Final</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conversas informais</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Intervenção Pedagógica</td><td rowspan="4">Atividades em grupos</td><td>Números figurados</td><td>Ficha própria</td></tr>
<tr><td>Correção de questões</td><td>Ficha própria</td></tr>
<tr><td>Análise de livros didáticos</td><td>Ficha própria</td></tr>
<tr><td>Formulação de problemas</td><td>Ficha própria</td></tr>
</table>

1 É o que Skemp (1976) chama de conhecimento ou entendimento relacional; o entendimento instrumental, também segundo esse autor, seria um entendimento de regras e técnicas apenas.

		Incomensurabilidade	Ficha própria
		Medida de segmentos	Ficha própria
		Equivalência de definições	Ficha própria
	Comentários após a realização das atividades		Quadro e pincel.
	Aulas expositivas (diretamente relacionadas ao tema da pesquisa)		“Pitágoras de Samos” (*slides*)
			“Medir, o que é? ” (*slides*)
			“Dízimas periódicas” (*slides*)
	Exibição e discussão de filmes		“The Story of Maths” (vídeo)
	Entrevista Final		-
Avaliação	Avaliação dos encontros		Fichas próprias
	Auto avaliação dos alunos		Fichas próprias
	Entrevistas Inicial e Final		-
	Conversas informais		-
Questões de Ética	Esclarecimentos		TCLE
	Retornos (*feedbacks*)		-

Fonte: Elaborado pelos autores[2].

Para exemplificar a ausência do reconhecimento de um objeto matemático, imaginemos uma criança que já conhece os números naturais, mas nunca viu algo parecido com $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ao se deparar com uma matriz como essa, a criança poderá achar engraçado o fato de se arrumarem números em filas (linhas e colunas) ou, até mesmo, que se trata de algum tipo de jogo. Ou seja, ela não reconhecerá esse objeto como o que os matemáticos chamam de matriz[3]. Como ilustração da presença do reconhecimento de um objeto matemático podemos continuar com o exemplo antecedente, imaginando agora que a criança aprendeu que esse objeto se chama matriz, que é composto por linhas e colunas, e que existem matrizes com as mais diversas combinações linha-coluna, como $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$etc. Dessa forma, a

2 Todas as figuras, quadros e tabelas deste trabalho foram elaboradas pelos autores ou pertencem ao acervo dos autores.

3 Um exemplo dessa situação é narrado por Romulo Campos Lins. Seu filho de 9 anos, ao se deparar com uma equação envolvendo uma integral escrita em uma lousa, disse: *Papai, parece linguagem alienígena!* (LINS, 2012, p. 27).

criança já compreendeu as propriedades básicas de uma matriz necessárias para realizar o seu reconhecimento, isto é, para identificar e diferenciar matrizes do que antes parecia apenas um amontoado de números sem sentido. Obviamente, a habilidade para reconhecer matrizes é o primeiro passo, mas não é suficiente para afirmar que a criança compreendeu o que é uma matriz. Essa compreensão pode se dar em vários níveis. No ensino médio, por exemplo, pode-se dizer que o estudante avançou em relação ao reconhecimento se, além de saber identificar uma matriz, ele é capaz de realizar operações com elas (soma, subtração, multiplicação, encontrar o determinante, entre outras), de resolver alguns sistemas de equações utilizando matrizes, de entender em que situações uma matriz pode ser utilizada para modelar um problema, entre outras características que compõe o conceito de matriz.

Em relação à definição de números irracionais, não esperávamos dos licenciandos definições como limites de sequências de Cauchy ou cortes de Dedekind. Esperávamos as definições mais comuns tratadas na educação básica (inclusive nos livros didáticos), que são:

i) Números que não podem ser representados como frações;
ii) Números que possuem representação decimal infinita e não periódica;
iii) Números reais que não são racionais.

Além dessas definições, também esperávamos encontrar alguma construção pessoal dos participantes. No que diz respeito à propriedade de densidade, a intenção foi apenas detectar se os licenciandos tinham esse conhecimento. Finalmente, em relação a existência dos irracionais, perguntamos aos estudantes "o que te faz acreditar na existência dos números irracionais"?

3 – Quadro teórico

O quadro teórico utilizado para a análise dos dados foi a imagem do conceito (TALL; VINNER, 1981), exemplos protótipos e associações com atributos relevantes e irrelevantes (HERSHKOWITZ, 1994). A seguir, discorremos brevemente a respeito de cada um deles. Para maiores detalhes, ver Broetto e Santos-Wagner (2017).

3.1 – Imagem do conceito

Denominamos por "figuras mentais" o conjunto de todas as figuras relacionadas a um determinado conceito presentes na mente de um indivíduo. Nesse caso, a palavra "figura" deve ser entendida no seu sentido mais amplo, incluindo qualquer representação visual, como símbolos, gráficos, expressões e procedimentos (VINNER, 1983). Assim, ao ouvir a palavra função, um indivíduo pode recordar a expressão $y = f(x)$, ou visualizar o gráfico de uma função, ou ainda pensar em casos específicos de exemplos de funções, como $y = x^2$ e $y = cos\ (x)$, dentre outras figuras mentais que sua mente associe com essa palavra (DOMINGOS, 2003). Além das imagens mentais, pode existir um conjunto de propriedades associadas ao conceito na mente do indivíduo. Por exemplo, um sujeito pode achar que a altura de um triângulo deve sempre ser interior ao triângulo ou que uma função deve sempre ser definida por meio de uma expressão algébrica (VINNER, 1983).

Ainda de acordo com Vinner (1983), imagem do conceito é a reunião das propriedades associadas ao conceito com as figuras mentais de um indivíduo. Outros trabalhos definem a imagem do conceito de outras formas equivalentes que ajudam a explicitar melhor o que está sendo tratado aqui. É o caso de Domingos (2003), que estabelece a imagem do conceito como "qualquer coisa não verbal associada na nossa mente ao nome do conceito" (p. 27). Ainda segundo esse autor, além de uma possível representação visual, a imagem do conceito pode ainda conter uma coleção de impressões e experiências associadas a um determinado conceito.

3.2 – Imagem da definição do conceito

Uma definição do conceito é uma descrição de um conceito com o uso de palavras. Mais precisamente, é uma "expressão verbal que explica acuradamente o conceito de uma forma não circular" (VINNER, 1983, p. 293, tradução nossa). Em geral, essas definições são criadas por especialistas e, no caso da matemática, também são resultado de um longo processo histórico de negociação, depuração, aceitação e revisão do conceito. Contudo, o indivíduo também pode construir para si uma definição pessoal para um determinado conceito, que pode ser uma variante equivalente a uma definição do conceito aceita pela comunidade científica ou pode ser totalmente incoerente com ela. Segundo Tall e Vinner (1981), "para cada indivíduo a definição do conceito gera sua própria imagem do conceito, que pode, em um voo de fantasia, ser chamada de imagem da definição do conceito" (p. 153, tradução nossa). Nas palavras de Giraldo (2004), "a imagem do conceito pode ou não incluir uma definição do conceito pessoal, que, por sua vez, pode (ou não) ser consistente com a definição formal" (p. 9).

A descrição “quadrilátero equiângulo” é um exemplo de uma definição para o conceito de retângulo e uma das possíveis variantes equivalentes seria “paralelogramo com ângulos congruentes”. Uma definição pessoal para retângulo incoerente com essas definições e que é comum de ser encontrada entre alunos que começam a estudar geometria seria “quadrilátero com quatro ângulos retos, lados opostos iguais e lados consecutivos diferentes”. Essa descrição é incoerente com a definição anterior pois, entre outras coisas, não considera um quadrado como um retângulo (GIRALDO, 2004).

Acordamos que uma definição do conceito formal, ou seja, aquela que é criada e aceita pela comunidade científica, será chamada simplesmente de definição do conceito. A definição do conceito pessoal, isto é, aquela definição criada pelo próprio indivíduo, que pode ou não coincidir com a definição do conceito, será aqui chamada de imagem da definição do conceito. Ao contrário de Tall e Vinner (1981), achamos que se trata de um voo bastante real e apropriado para o que pretendemos com este trabalho.

Imagem do conceito e definição do conceito podem ser formadas independentemente, além disso, elas podem ou não interagir na mente do indivíduo. A imagem do conceito pode conter elementos incoerentes dividindo o mesmo espaço e isso inclui a imagem da definição do conceito, que pode ser incoerente com alguma figura mental ou propriedade associada ao conceito. “Uma definição do conceito consistente com a definição formal, uma imagem do conceito rica e uma imagem do conceito consistente são fenômenos mutuamente independentes” (GIRALDO, 2004, p. 10). A existência de incoerência entre algumas das partes da imagem do conceito foi chamada de “fator de conflito potencial” e, se esses fatores são evocados simultaneamente, eles se tornam conflitantes, e serão chamados de “fatores de conflito cognitivo” (TALL; VINNER, 1981, p. 153-154). Como exemplo desse conflito potencial, um dos sujeitos de nossa pesquisa de doutorado (BROETTO, 2016) apresentou a seguinte definição para os irracionais: *é o número que não é obtido pela divisão de números inteiros*. Em seguida, o mesmo sujeito classificou a fração 13/23 como um número irracional.

3.3 – Exemplos protótipos, atributos relevantes e irrelevantes

Quando se pede a alguém para desenhar um quadrilátero e um triângulo, frequentemente o resultado apresentado é um quadrado e um triângulo equilátero (Figura 1). Nesse caso, o quadrado e o triângulo equilátero são exemplos do que é chamado de exemplos protótipos (ou prototípicos) em Hershkowitz (1994). Tais formas geométricas são consideradas as melhores exemplares das categorias "quadrilátero" e "triângulo" porque apresentam um maior número de características que os fazem pertencer a essas categorias, além de terem um forte apelo visual e de terem sido, provavelmente, os exemplos por mais vezes vistos pelo sujeito no que se refere a essas categorias. Em muitos casos, os professores trazem estes exemplos protótipos em suas aulas e muitos livros didáticos mostram também esses exemplos iniciais de quadrilátero e triângulo sem chamarem atenção dos alunos para outros exemplos nem discutirem acerca das características particulares de cada exemplo.

Figura 1 – Exemplos prototípicos de quadrilátero e triângulo.

Essas características que definem as categorias podem ser classificadas, de acordo com a concepção original de Hershkowitz (1994), como atributos relevantes (ou críticos) e atributos irrelevantes (ou não críticos). De acordo com o autor, atributos relevantes são aqueles que devem ser satisfeitos para termos um exemplo positivo[4] do conceito e atributos irrelevantes são aqueles que apenas alguns dos exemplos positivos possuem. No caso do quadrilátero, possuir quatro lados é um atributo relevante, pois todo quadrilátero possui quatro lados, mas os quatro lados serem iguais é um atributo irrelevante, pois é uma característica que apenas alguns quadriláteros possuem. Outros atributos irrelevantes seriam ter todos os ângulos retos, ter dois pares de lados paralelos, entre outros. No caso do triângulo, possuir três lados é uma característica relevante, mas possuir três lados iguais ou três ângulos iguais são atributos irrelevantes. Segundo Hershkowitz (1994), os exemplos protótipos são aqueles que reúnem a maior listagem de atributos relevantes e irrelevantes, o que explica

4 Hershkowitz (1994) usa o termo exemplo positivo como antônimo de contraexemplo, que seria o exemplo negativo.

um quadrado e um triângulo isósceles ou equilátero (Figura 1 – Exemplos prototípicos de quadrilátero e triângulo.) serem usados como exemplos de quadriláteros e triângulos – por professores e por livros didáticos – e se tornarem, respectivamente, exemplos protótipos desses polígonos.

Apesar de originalmente elaboradas para um contexto de geometria, avistamos nas ideias de Hershkowitz (1994) uma ferramenta capaz de auxiliar-nos na análise de dados de nossa pesquisa com números irracionais no ensino superior (BROETTO, 2016). Porém, alguns ajustes precisaram ser realizados para contemplar algumas situações. Por exemplo, quando um aluno considera que um determinado número é irracional porque é um número inexato, de acordo com o trabalho citado, não poderíamos dizer que se trata de um atributo relevante nem irrelevante, já que a inexatidão não é característica de nenhum exemplo positivo da categoria dos números irracionais[5]. Para abarcar esses atributos, nossa ideia foi reservar o termo atributos irrelevantes para os atributos que não têm nenhuma relação com o conceito, isto é, que não são características de nenhum exemplo positivo do conceito. Os atributos relevantes ficariam divididos em dois subgrupos: os atributos críticos, aqueles que todos os exemplos positivos de uma categoria devem ter, e os atributos não críticos, aqueles que apenas alguns dos exemplos positivos possuem. Feita essa adequação, podemos citar, como exemplo, alguns dos principais atributos relevantes e irrelevantes dos números irracionais que foram detectados nas respostas dos sujeitos participantes de nossa pesquisa de doutorado (BROETTO, 2016) (Ver Quadro 2).

Quadro 2 – Atributos relevantes e irrelevantes de números irracionais		
Exemplos protótipos: π, raiz quadrada		
Atributos relevantes		**Atributos irrelevantes**
Críticos	*Não críticos*	

5 Na verdade, nenhum número possui esse atributo. Todo número pode ser representado por um ponto na reta, portanto, é exato.

• Impossibilidade de representação como quociente/razão de números inteiros • Dízima não periódica	• Ausência de padrão de repetição • Ausência de regularidade • Representação por meio de raiz quadrada	• Inexatidão • Imprevisibilidade • Divisão não exata • Números que tendem ao infinito • Números aproximados

4 – Análise de dados

Ao todo, 24 licenciandos assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e participaram do Estudo Principal. Eles foram informados sobre os objetivos e os aspectos éticos da pesquisa e sobre nosso compromisso de respeito a identidade deles e questionados sobre o desejo deles de seguirem participando da pesquisa e de autorizarem que divulgassem os dados coletados, produzidos e analisados. Desse total, 20 licenciandos tiveram algumas de suas respostas destacadas das demais e, para nos referirmos a eles, utilizamos os nomes fictícios: Ulysses, Casper, Wendell, Octavio, Fidelia, Zelma, Lilith, Agatha, Silvester, Felix, Sheldon, Calvin, Ernest, Percival, Dixie, Jasper, Cyrus, Hank, Titus e Rufus. Eventualmente, devido a ausências de algum licenciando nas atividades ou pela nulidade de alguma resposta (por exemplo, a marcação de 'sim' e 'não' simultaneamente), algumas atividades aparecem com um número inferior a 24.

4.1 – Reconhecimento

Os dados referentes ao reconhecimento de números racionais e irracionais foram coletados durante três etapas. Na etapa de diagnóstico, pela primeira questão dos Questionários Q1 e Q2, na etapa de intervenção pedagógica, principalmente na atividade de correção de questões e, na etapa de avaliação, durante as entrevistas finais. Avaliamos o reconhecimento de frações, representações fracionárias com raiz quadrada ou π no numerador, dízimas periódicas, dízimas não periódicas e outras, que serão apresentadas a seguir, conjuntamente com sua análise.

4.1.2 – Frações

Em relação às frações consideraram $\frac{-3}{14}$, $\frac{22}{7}$ e $\frac{13}{23}$ presentes nos Questionários Q1 e Q2. Os resultados majoritários foram: 15 dos 24 sujeitos não consideraram $\frac{-3}{14}$ como um número racional, 18 dos 24 sujeitos consideraram $\frac{22}{7}$ um número racional e 10 dos 23 sujeitos consideraram $\frac{13}{23}$ um número irracional (empatado com o número de sujeitos que consideraram essa fração um número racional) (Ver Quadro 3). Frente a esses dados, entendemos que pelo menos duas perguntas precisavam ser respondidas: o que levou a maioria dos sujeitos a não considerar as frações apresentadas como números racionais ou a considerá-las como números irracionais? Por que $\frac{22}{7}$ foi considerado racional pela maioria dos licenciandos, enquanto $\frac{-3}{14}$ e $\frac{13}{23}$ foram consideradas irracionais?

As justificativas de Ernest, Ulysses e Cyrus, destacadas no Quadro 3, levaram-nos a pensar na hipótese que levantamos durante o Estudo Exploratório de que alguns sujeitos decidem se frações são racionais ou não após convertê-las para representação decimal. Como as três frações em questão possuem uma dízima periódica, esses licenciandos consideraram-nas irracionais por não terem visualizado a parte periódica, a regularidade ou o 'fim' da divisão. Pudemos confirmar essa hipótese nas entrevistas finais realizadas com Ulysses, Cyrus, Titus e Agatha, e é provável que o mesmo tenha ocorrido com Ernest. Isso responde à primeira pergunta.

Quadro 3 – Desempenho da turma e dos alunos selecionados em relação ao reconhecimento de frações de inteiros nos Questionários Q1 e Q2.

Frações de inteiros	Turma		Ernest	Ulysses	Cyrus	*Inst.*	Data
$\frac{-3}{14}$ é racional?	Sim	8	Não.	Não.	Não.	Q1	12/5/14
	Não	15	O resultado é uma dízima não periódica.	Não apresenta regularidade.	Divisão inexata.		
	E/B	1					
$\frac{22}{7}$ é racional?	Sim	18	Não.	Não.	Não.		
	Não	6	Pois o resultado da divisão não será uma dízima periódica 3,14285...	Não apresenta regularidade.	Divisão inexata.		
	E/B	0					

$\frac{13}{23}$ é irracional?	Sim	10	Sim.	Sim.	Sim.	Q2	14/5/14
	Não	10	Pois o resultado é uma dízima não periódica.	Não apresenta regularidade em sua forma escrita.	Divisão inexata.		
	E/B	3					

Legenda: E/B – Em branco.

Encontramos em Mosca (2013) um relato semelhante, trata-se do exemplo de um professor que ofereceu $9/14$ como exemplo de número irracional. Ao ser indagado como havia chegado a essa conclusão, ele disse que "em forma de fração é racional, mas se dividirmos é irracional" (COSTA, 2008, p. 66 apud MOSCA, 2013, p. 21)[6]. Sua justificativa deixa claro o que ele fez, dividiu os números e, como a parte periódica de $9/14$ tem seis casas decimais, é provável que o mesmo tenha ocorrido com esse professor; isto é, ao não visualizar a parte periódica, considerou o número como irracional. Também não podemos deixar de destacar que, segundo a concepção desse professor, um número possui uma natureza dual, isto é, pode ser racional ou irracional, de acordo com a representação. Aqui pensamos novamente na associação número-representação como uma possível explicação para esse comportamento do professor, conforme apontado por Igliori e Silva (1998).

Em relação à segunda pergunta, podemos pensar que $\frac{22}{7}$ obteve maior índice de acertos, pois sua representação decimal tem o menor número de casas na parte periódica em comparação com as outras frações, sendo, portanto, mais facilmente visualizada. Quanto aos 6 dos 24 licenciandos que consideraram essa fração como um número irracional, não encontramos nenhuma evidência que apontasse algo semelhante ao que foi comentado em Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987) e em Vinner (2011). Esses autores assinalaram que muitos alunos e até professores consideram $\frac{22}{7}$ um número irracional por se tratar de uma conhecida aproximação racional para π. Contudo, é uma possibilidade que também não podemos descartar.

Avaliando mais de perto as justificativas apresentadas pelos

6 COSTA, C. **Considerações sobre números racionais na sala de aula de matemática**. Monografia, Graduação. Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, 2008.

alunos que destacamos no Quadro 3 – Desempenho da turma e dos alunos selecionados em relação ao reconhecimento de frações de inteiros nos Questionários Q1 e Q2., vemos que apenas Ernest baseou seu julgamento em um atributo relevante dos números irracionais (HERSHKOWITZ, 1994). De fato, toda dízima não periódica é um número irracional. Quanto a Ulysses e Cyrus, eles fundamentaram suas justificativas em atributos não relevantes dos números irracionais, como a falta de regularidade e a divisão inexata. De fato, a irregularidade (pensada como ausência de padrão) e a inexatidão não são características determinantes dos números irracionais. Como exemplos, podemos citar como irracional o $1{,}010010001\ldots$ que possui regularidade e como racional o $1/3$ ou qualquer dízima periódica, cuja divisão é 'inexata'.

Alguns fatores pontuais também devem ser mencionados, como o caso do efeito perturbador que o sinal negativo provocou em relação ao reconhecimento de $\frac{-3}{14}$. Dentre os quinze alunos que não consideraram esse número como racional, cinco mencionaram explicitamente a presença desse sinal como justificativa. Um dos casos foi o do licenciando Silvester, que escreveu *o numerador não pode ser negativo*. Dado semelhante foi apurado em Igliori e Silva (1998), em que metade dos alunos iniciantes de um curso de Computação classificou o número $\frac{-3}{7}$ como irracional. Nessa obra, considerou-se que isso ocorreu possivelmente porque esse número é, ao mesmo tempo, negativo e com uma representação decimal infinita. Observou-se também que, nesse caso, parece ter ocorrido a associação número – representação.

Outro fator pontual, mas nem por isso menos preocupante, apresenta-se na resposta de Fidelia para o item $\frac{13}{23}$. A estudante não considerou essa fração como irracional, mas sua justificativa foi *não possui raiz e nem letras gregas como o π*. Isso indica que ela considera números irracionais como aqueles que se apresentam em forma de raiz ou com letras gregas, como o π. Trata-se, evidentemente, de uma imagem de conceito empobrecida e distorcida para o conceito de número irracional.

4.1.3 – Representações fracionárias com raiz quadrada ou π no

numerador

Em relação às quatro representações fracionárias com raiz quadrada ou π no numerador presentes nos Questionários Q1 e Q2 (ver Quadro 4), a maioria da turma classificou-as corretamente. Porém, uma quantidade expressiva de alunos cometeu erros que consideramos graves: 8 dos 24 sujeitos consideraram $\frac{\sqrt{3}}{2}$ um número racional; 9 dos 24 sujeitos consideraram $\frac{4\pi}{3}$ como um número racional; 8 de 23 sujeitos não consideraram $\frac{3\pi}{4}$ um número irracional ou deixaram em branco; 8 de 23 sujeitos não consideraram $\frac{\sqrt{5}}{2}$ um número irracional ou deixaram em branco.

Como já mencionado anteriormente, a intenção com esses itens foi misturar exemplos prototípicos (HERSHKOWITZ, 1994) do número racional, como a fração e a representação fracionária, com exemplos prototípicos de números irracionais como π e raízes quadradas. Esse conflito parece ter sido o responsável por vários erros cometidos pela turma. Como, por exemplo, as respostas e justificativas de Zelma (ver Quadro 4) apontam para a força do exemplo protótipo de razão (ou fração) como determinante no reconhecimento de um número racional. Nos dois casos, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}}{2}$, a estudante utiliza a palavra 'fração' nas suas justificativas para considerar esses números como números racionais. De fato, estar escrito em forma de representação fracionária não é um atributo crítico, isto é, não é determinante para saber se o número é racional ou irracional, já que podemos escrever números racionais como 0,666... em forma de razão 2/3, assim como podemos escrever um irracional como π em forma de razão C/D, onde C é o comprimento e D é o diâmetro de uma circunferência.

Em relação à π, a presença desse número (ou símbolo) parece suscitar associações com a inexatidão, exemplificadas nas expressões utilizadas pelos sujeitos destacados no Quadro 4, como: *não dá para mensurar*, *não encontramos valor exato*, *seu resultado é incerto* e *números não compreendidos*. Como essas associações também são comuns quando se trata de número irracional, isso parece explicar os índices nulos de erro de Zelma, Felix e Jasper quanto ao reconhecimento de números envolvendo π como números irracionais. Isto é, π é considerado inexato porque é irracional e vice-versa. Porém, como mencionamos, na turma como um todo houve um índice expressivo de erros, semelhante ao que foi relatado em Igliori e Silva (1998), quando perguntaram a 33 alunos iniciantes de um curso de ciência da computação a respeito de π/10 e 39% respondeu que se tratava de um número racional. Segundo os autores, "a classificação do número π /10como racional, feita por 13 iniciantes parece indicar que houve uma identificação entre um número fracionário e sua representação fracionária"[7] (IGLIORI; SILVA, 1998, p. 5).

Quadro 4 – Desempenho da turma e dos alunos selecionados em relação ao reconhecimento de frações com raízes quadradas ou π no numerador

Frações com raízes ou π no numerador	**Turma**		**Zelma**	**Felix**	**Jasper**	***Inst.***
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ é racional?	Sim	8	Sim	Não	Não	Q1
	Não	14	Porque está representado em forma de fração.	Porque não conseguimos relacioná-lo.	Porque raiz não é número e não indica com clareza um número.	
	E/B	2				
$\frac{4\pi}{3}$ é racional?	Sim	9	Não	Não	Não	
	Não	13	Porque não é dízima periódica e nem número decimal exato.	Porque não dá para mensurar.	Uma fração com números não compreendidos.	
	E/B	2				
$\frac{\sqrt{5}}{2}$ é irracional?	Sim	15	Não	Não	EB	Q2
	Não	3	Porque é fração.	Porque podemos fazer uma relação dele.	EB	
	E/B	5				
[illegible] é irracional?	Sim	15	Sim	Sim	EB	
	Não	4	Porque na resolução com variável não encontramos valor exato.	Porque não há um número que possa prever, seu resultado é incerto.	EB	
	E/B	4				

Legenda: E/B – respostas deixadas em branco.

No que diz respeito às representações fracionárias contendo raízes

7 Nem todo número escrito na representação fracionária é um número fracionário. Por exemplo, 10/2 e √2/2 estão escritos na representação fracionária, mas não são números fracionários. O primeiro é um número inteiro e o segundo é um número irracional.

quadradas, lembramos que no estudo exploratório, apenas um pequeno número de licenciandos, 2 entre 19, considerou $\frac{\sqrt{2}}{2}$ como um número racional, mas a pesquisa de Boff (2006) mostrou um alto índice de erros em uma questão semelhante. Um percentual de 49% dos calouros de licenciatura considerou $\sqrt{6}/2$ como um número racional. Além do caso já citado de Zelma, destacamos a justificativa de Jasper para não considerar $\frac{\sqrt{3}}{2}$ um número racional. Segundo o licenciando, *raiz não é número e não indica com clareza um número* (ver Quadro 4 – Desempenho da turma e dos alunos selecionados em relação ao reconhecimento de frações com raízes quadradas ou π no numerador). Percebemos nessas palavras o reflexo de duas visões já relatadas por outras pesquisas – o irracional como um não número e o irracional como algo incerto. A primeira pode ser encontrada em Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), pesquisa em que muitos alunos do 9º ano não consideraram representações com raízes como números, enquanto a segunda foi detectada em Igliori e Silva (1998) e também em nosso Estudo Exploratório. Essa visão provavelmente é transferida para a raiz quadrada, ou vice-versa, isto é, como a raiz quadrada é um dos exemplos de número irracional mais frequentes nos livros didáticos e sua representação decimal precisa ser aproximada para ser utilizada na prática, possivelmente o estudante transfere seu entendimento da raiz quadrada como algo aproximado para os números irracionais.

4.1.4 – Dízimas periódicas e não periódicas

Foi nossa intenção avaliar a turma também pela representação de quatro dízimas periódicas, $0{,}0555\ldots$, $2{,}343434\ldots$, $0{,}666\ldots$ e $1{,}222\ldots$, e de duas dízimas não periódicas, $1{,}010010001\ldots$ e $1{,}1212212221\ldots$. Observando os resultados gerais da turma no Quadro 5, constatamos que a maioria dos alunos entendeu da mesma forma, o que indica a presença do acordo tácito que utiliza as reticências para indicar a continuidade de um padrão. Essas duas dízimas não periódicas têm uma característica em comum, ambas possuem um padrão. A escolha de representações decimais com essas características foi proposital e se deve à suspeita de que alguns alunos associam padrão ou regularidade com número racional e, consequentemente, a falta de padrão ou regularidade com número irracional.

Vejamos o caso de 1,1212212221... Nos dois estudos anteriores que realizamos, esse número foi considerado racional por 7 entre 19 sujeitos no Estudo Exploratório, e não foi considerado irracional por 3 entre 11 sujeitos no Pequeno Estudo Diagnóstico. No Estudo Principal, 10 entre 23 sujeitos não o consideraram um número irracional (Ver Quadro 5).

Quadro 5 – Desempenho da turma e dos alunos selecionados no que se refere às dízimas periódicas e não periódicas dos Questionários Q1 e Q2

Dízimas	Turma		Titus	Ulysses	Percival	Inst.
0,0555... é racional?	Sim.	16	Sim.	Sim.	Não.	
	Não.	6	É uma dízima periódica.	Apresenta regularidade.	Imagino que não seria pois é infinito.	
	E/B	2				
	Sim.	16	Sim.	Sim	Não.	
	Não.	7	É uma dízima periódica.	Apresenta regularidade.	A mesma razão acima.	
	E/B	1				
0,666... é racional?	Sim.	17	Sim.	Sim.	Não.	
	Não.	7	É uma dízima periódica.	Apresenta regularidade.	O mesmo é infinito.	Q1
	E/B	0				
1,010010001...é racional?	Sim.	9	Sim.	Sim.	Não.	
	Não.	14	Apresenta um padrão lógico de repetição.	Apresenta regularidade.	A mesma razão acima.	
	E/B	1				
			Titus	Ulysses	Calvin	

3,1444... é irracional?	Sim.	8	Não.	Não.	Sim.	Q2
	Não.	10	A repetição apresentada no número é lógica.	Apresenta regularidade.	Uma dízima periódica e que leva ao infinito.	
	E/B	5				
1,222... é irracional?	Sim.	8	Não.	Não.	Sim.	
	Não.	12	A repetição apresentada no número é lógica.	Apresenta regularidade.	Por ser uma dízima periódica.	
	E/B	3				
1,121221222... é irracional?	Sim.	11	Não.	Não.	Sim.	
	Não.	10	A repetição apresentada no número é lógica.	Apresenta regularidade.	Não é uma dízima, porém, o resultado não é exato, o que o torna irracional.	
	E/B	2				

Legenda: E/B – Em branco.

Ainda sobre o número citado, com uma pequena diferença na representação, ele foi considerado racional por 17% dos licenciandos que participaram da pesquisa de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995). A outra dízima com padrão, 1,010010001 ..., foi considerada um número racional por 9 entre 24 sujeitos no Estudo Principal (ver Quadro 5 – Desempenho da turma e dos alunos selecionados no que se refere às dízimas periódicas e não periódicas dos Questionários Q1 e Q2). Na análise conduzida em Boff (2006), um número bastante semelhante, a saber, 0,010010001 ..., foi considerado racional por 59% dos licenciandos. Em outras pesquisas, outros números irracionais cuja representação decimal possui um padrão também foram considerados racionais por um número significativo de sujeitos. Na pesquisa de Melo (1999), por exemplo, 10 alunos (23,2%) do 1º ao 3º período de licenciatura em matemática classificaram o número 0,171771777... como racional, enquanto no trabalho de Igliori e Silva (1998), 9 sujeitos (25%) fizeram o mesmo ao avaliarem o número 4,21222324....

As justificativas de Titus e Ulysses (ver Quadro 5 – Desempenho da turma e dos alunos selecionados no que se refere às dízimas periódicas e não periódicas dos Questionários Q1 e Q2) deixaram evidente o motivo da classificação de 1,1212212221 ... e 0,010010001 ... como números racionais (ou não irracionais): a presença de um padrão ou regularidade em sua representação decimal reforçam, conjuntamente aos dados de outras pesquisas, nossa hipótese da existência de uma associação do padrão com o número racional, ou, equivalentemente, da ausência de padrão com o número irracional.

Outra hipótese que surge com o Quadro 5 – Desempenho da turma e dos alunos selecionados no que se refere às dízimas periódicas e não periódicas dos Questionários Q1 e Q2 é a de que há uma associação do infinito com o número irracional, refletida na justificativa de Percival. Cumpre destacar ainda a presença da associação do número irracional com a inexatidão nas questões contendo dízimas periódicas e não periódicas, representada no Quadro 5 – Desempenho da turma e dos alunos selecionados no que se refere às dízimas periódicas e não periódicas dos Questionários Q1 e Q2 pela justificativa de Calvin ao considerar 1,121221221 ... um número irracional. Além dele, outros estudantes também fizeram tal associação: Osana considerou irracionais os números 3,1444..., 1,121221222... e 1,222..., pois todos são obtidos a partir do *resultado da divisão de números não exatos;* Fidelia não considerou irracional $\sqrt[3]{27}$ pois *dará um número exato então não é irracional;* Cyrus considerou irracionais os números 3,1444..., 1,121221222... e 1,222..., pois a divisão é inexata. Ambas associações, infinito-irracional e inexatidão-irracional também foram detectadas na pesquisa de Igliori e Silva (1998).

4.2 – Definição

Perguntamos explicitamente a respeito da definição de números racionais e irracionais nos questionários Q1 e Q2, respectivamente, e na Entrevista Final. A pergunta foi feita de forma direta como recomendado em Vinner (1991). Em relação aos irracionais, estimulamos os alunos a pensar em duas definições, uma aprendida na escola e uma de acordo com a opinião de cada um[8]. Pensamos que dessa forma poderíamos ter maiores chances de saber se existe alguma reconstrução pessoal da definição, cientes de que essa pergunta possa ter estimulado uma reconstrução pessoal do licenciando no momento em que foi requerida[9]. As definições mais frequentes que surgiram foram agrupadas de acordo com a ideia central contida nelas mesmas, sendo que cada definição apresentada pode ter mais de uma ideia, por isso, ela pode ter sido contabilizada em mais de uma categoria.

8 A ideia de dividir a pergunta a respeito da definição de irracionais em duas partes surgiu da resposta de uma licencianda ao Pequeno Estudo Diagnóstico.

9 Estamos dizendo com isso que a “definição de acordo com sua opinião” pode ter sido algo que foi dito, mas não estava bem amadurecido. O sujeito poderia inclusive nunca ter pensado nisso antes.

Apresentamos, para cada ideia central das definições, as principais expressões utilizadas pelos licenciandos no Quadro 6.

Quadro 6 – Como você define números racionais? (Questionário Q1 em 12/5/2014)

Conteúdo da definição – expressões utilizadas	**Sujeitos**
FRAÇÃO/RAZÃO – números que podem ser escritos/representados/obtidos por uma fração/razão de/entre dois números (inteiros)	11/24
DIVISÃO – números que podem ser escritos/representados/obtidos por uma divisão	6/24
DÍZIMAS PERIÓDICAS – números/divisão/fração que podem ser escritos/representados/resultar por/em uma dízima periódica	4/24
PADRÃO, REGULARIDADE OU PREVISIBILIDADE – números que apresentam regularidade, padrão ou previsibilidade	3/24
OUTRAS	1/24
EM BRANCO	4/24

No que diz respeito à definição de números racionais (Quadro 6 – Como você define números racionais? (Questionário Q1 em 12/5/2014)), havia a possibilidade de que as expressões mais utilizadas pelos licenciandos apresentassem associações referentes às representações fracionárias ou às dízimas periódicas. Isso porque são definições largamente utilizadas nos livros didáticos, além de terem sido detectadas em algumas pesquisas, como em Fischbein, Jehiam e Cohen (1995). Observando o Quadro 6 – Como você define números racionais? (Questionário Q1 em 12/5/2014), vemos que as definições que utilizam representação fracionária e dízima periódica estão entre as três opções mais frequentes dos licenciandos, tendo surgido uma associação entre as duas que esperávamos. Seis estudantes mencionaram a divisão e utilizaram expressões como *números que podem ser escritos/representados/obtidos por uma divisão*. Rigorosamente falando, o uso do termo divisão para definir um racional consiste em um problema, já que é possível representar um irracional por meio de uma divisão, como $4\pi/2$. Não sabemos se esse termo foi utilizado como um equivalente à fração, mas, de qualquer forma, optamos por não agrupar as definições que utilizaram o termo divisão com aquelas que utilizaram o termo fração ou razão.

Em termos da qualidade dos atributos utilizados, todas as categorias de conteúdos apresentadas no Quadro 6 – Como você define números racionais? (Questionário Q1 em 12/5/2014) podem ser consideradas atributos críticos dos números racionais, com exceção da categoria "dízimas periódicas", que é um atributo não crítico (um número racional pode ser representado por uma decimal exata). No entanto, apesar de serem críticos, alguns desses atributos não são suficientes para diferenciar um número racional de um irracional, como por exemplo, "divisão" e "padrão/regularidade". De fato, como já argumentamos, um número irracional pode ser apresentado como divisão e também pode ter um padrão/regularidade, como no caso de $1{,}010010001\ldots$

Referente à definição para números irracionais, ao perguntar *o que são números irracionais segundo o que você aprendeu nas aulas de matemática*, pensamos constatar que as respostas mais frequentes fossem as negativas das definições para números racionais, isto é, *não podem ser escritos em forma de fração* ou *dízima não periódica*. O motivo da nossa expectativa deve-se ao fato de essas respostas estarem no topo das mais citadas em diversas pesquisas, como as desenvolvidas por Cezar (2011, 2014), Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987), Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) e Soares, Ferreira e Moreira (1998). Além disso, essas definições também podem ser encontradas em livros didáticos da educação básica. No entanto, de acordo com o Quadro 7, elas foram a segunda e a terceira definições mais citadas. Em primeiro lugar surgiu a categoria inexato/incompreensível/não definido, que são atributos irrelevantes não apenas dos números irracionais, mas de qualquer número. É interessante pensar sobre como é possível encontrar espaço para inexatidão na ciência da exatidão por excelência.

Considerando essa questão, colocamos uma lente de aumento nas respostas dadas pelos alunos nessa categoria, que também surgiu no Estudo Exploratório e no Pequeno Estudo Diagnóstico. Observando, portanto o conteúdo dessa categoria no Quadro 7, nossa hipótese é que os alunos fazem associação do número com sua representação. A sensação de inexatidão conferida pela representação decimal de um número irracional, provavelmente devido às questões relacionadas ao infinito e a algo que não se repete nunca (dízima não periódica), é transferida para o próprio número. Cabe mencionar que esse tipo de associação também foi detectado em Igliori e Silva (1998) e aprofundada em Broetto (2016).

Quadro 7 – O que são números irracionais segundo o que você aprendeu nas aulas de matemática? (Questionário Q2, aplicado em 14/05/2014)	
Conteúdo da definição – expressões utilizadas	**Sujeitos**
INEXATO/INCOMPREENSSÍVEL/NÃO DEFINIDO – números que resultam/levam de/a divisões/situações inexata(s); números que fogem à compreensão concreta de seus valores; números representados por símbolos não definidos; números que não se tem exatidão que seguem para o infinito.	5/23
NÃO FRAÇÃO – números que não podem ser descritos/representados por uma fração de inteiros/irredutível; representação não periódica em forma de não fração; números que não podem ser escritos na forma a/b.	4/23
INFINITO E NÃO PERIÓDICO – números que são infinitos e não periódicos; números cuja representação é infinita e não periódica.	2/23
NÃO DIVISÃO – números que não podem ser obtidos pela divisão de dois/ números inteiros.	2/23
IRREGULARIDADE – números que não apresentam regularidade em sua forma escrita.	1/23
OUTRAS – números que possuem raiz em sua notação; números não reais; números não inteiros; números que podem ser convertidos à dízima.	4/23
NÃO SABE/NÃO LEMBRA	3/23
EM BRANCO	2/23

Quando perguntamos aos alunos *o que são números irracionais segundo sua opinião*", objetivávamos verificar a diversidade – ou não – de respostas, ou seja, se surgiriam muitas explicações diferentes, fruto da reconstrução pessoal de cada aluno. Isso de fato aconteceu. Observando as categorias do **Quadro 8**, nota-se o surgimento de algumas novidades em relação ao **Quadro 7 – O que são números irracionais segundo o que você aprendeu nas aulas de matemática? (Questionário Q2, aplicado em 14/05/2014)**, como "não inteiro" (3 ocorrências), "complexo" (duas ocorrências) e "não apresenta padrão" (1 ocorrência). A impossibilidade de escrever em forma de fração e a questão da dízima não periódica foram citadas por apenas dois estudantes, enquanto a inexatidão continuou no topo da lista.

Quadro 8 – O que são números irracionais segundo sua opinião? (Questionário Q2, aplicado em 14/05/2014)	
Conteúdo da definição – expressões utilizadas	**Sujeitos**
INEXATO/INCOMPREENSSÍVEL/IMPREVISÍVEL/INEXPRESSÍVEL – números que não podemos definir seu desenvolvimento; número de divisão inexata, senão por 1 ou ele mesmo; números que tendem ao infinito, mas que não podem ser previstos de maneira concreta; todos os números não exatos e que possuem tanto a raiz e a letra grega π; impossibilidade de se escrever um número.	5/23

INFINITO E/OU NÃO PERIÓDICO – números decimais infinitos ou dízimas não periódicas infinitas; resultado que proporciona números infinitos; números que tendem ao infinito, mas que não podem ser previstos de maneira concreta; número fracionário, infinito e não periódico.	4/23
NÃO INTEIRO – números que não são inteiros; números que não dá para obter um inteiro a partir dele; número que não é real, sem valor inteiro.	3/23
COMPLEXO – números muito grandes ou muito pequenos de difícil compreensão; números estudados à parte por sua complexidade.	2/23
NÃO APRESENTA PADRÃO – números que não apresentam um padrão.	1/23
NÃO FRAÇÃO – números decimais infinitos que não consigo colocá-lo em forma de fração.	1/23
OUTRAS – números que não têm raiz; constantes matemáticas resultantes de uma razão qualquer; resultados de números irracionais.	3/23
NÃO SABE/NÃO LEMBRA	2/23
EM BRANCO	3/23

Entre essas categorias, algumas nos parecem reveladoras das dificuldades dos alunos, como a associação do irracional a algo difícil, complexo e imprevisível, além de consistirem em atributos irrelevantes para o conceito de irracional. Quanto ao infinito, é verdade que todo número irracional tem uma representação decimal infinita, mas do jeito que um licenciando escreveu, *números que tendem ao infinito, mas que não podem ser previstos de maneira concreta,* não sabemos se ele se refere ao número em si ou aos dígitos da representação decimal. Se for o primeiro caso, o infinito será um atributo irrelevante, pois nenhum número é infinito. Contudo, caso seja o segundo caso, trata-se de um atributo crítico.

Como um todo, a análise das definições de racionais e irracionais apresentadas mostra um número relevante de definições baseadas em associações não favoráveis à aprendizagem, isto é, que fazem menção a atributos irrelevantes como a "não divisão", a inexatidão, a indefinição ou a complexidade. Ademais, é imperativo destacar que as associações com a irregularidade, com a imprevisibilidade, com o "não inteiro" ou com o "não padrão", apesar de se valerem de atributos não críticos, podem ser revertidas, pois necessitam apenas de alguns ajustes, como a apresentação de exemplos e contraexemplos que possam enriquecer a imagem do conceito e reformular ou reconstruir as associações apresentadas.

4.3 – Densidade

A noção de densidade foi objeto de quatro questões, sendo duas em cada um dos questionários. Na Tabela 1 apresentamos os dados referentes à questão 5 do questionário Q1.

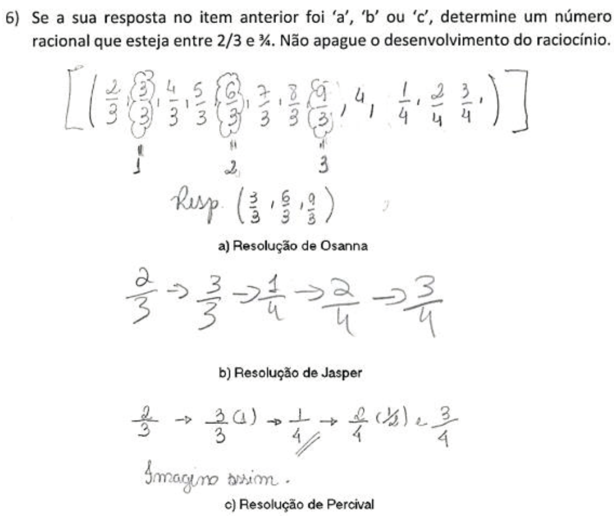
Tabela 1 – Densidade dos racionais				
Quantos números racionais existem entre 2/3 e ¾? (Questão 5 do questionário Q1)				
Um	Muitos	Infinitos	Nenhum	EB
2/24	8/24	11/24	2/24	1/24

De acordo com a Tabela 1 – Densidade dos racionais, a escolha majoritária da turma na questão 5 do questionário Q1, assinalada por 11 sujeitos, foi a alternativa "infinitos" números e, dentre eles, a estratégia majoritária para determinar um número racional entre 2/3 e ¾ (questão 6 do questionário Q1), adotada por 3 sujeitos, foi primeiro converter 2/3 e ¾ para forma decimal e em seguida apresentar o número pedido, também na forma decimal. Essa estratégia também foi a mais utilizada por toda a turma ao resolver a questão 6 do questionário Q1. Na pesquisa relatada em Boff (2006), da qual participaram 39 licenciandos, 31% respondeu "infinitos" para a mesma pergunta que fizemos, mas nenhum deles conseguiu dar um exemplo sequer. Concordamos com Boff (2006) que se trata de um indício de que a densidade dos racionais é aceita e apenas memorizada pelos estudantes, mas não completamente entendida.

Ainda sobre a Tabela 1 – Densidade dos racionais, a segunda resposta de maior frequência foi "muitos", escolhida por 8 dentre 24 sujeitos. Em Dias (2002), também foram relatadas respostas parecidas ("alguns", "vários" e "muitos") para uma pergunta semelhante, sendo que os participantes eram professores do ensino fundamental. Entre os participantes desta pesquisa, vale destacar que Titus e Agatha estiveram entre os licenciandos que marcaram a opção "muitos" na questão da densidade dos racionais (questão 5 do questionário Q1). O que leva alguém a pensar assim? O que esses 8 sujeitos pensaram ao responder que existem muitos números entre 2/3 e ¾? As conversas que tivemos com eles na Entrevista Final ofereceram algumas pistas para responder a essas perguntas.

Osana, Jasper, Percival e Zelma também estão entre os que erraram a questão 5 do questionário Q1 – os três primeiros marcaram a alternativa "muitos" e a última marcou a opção "um" – porém, as respostas que esses alunos deram para a questão 6 do questionário Q1 mostrou indícios de que esses "erros", apesar do desacordo com a matemática, podem estar fundamentados em construções ou ideias próprias dos alunos. Osana, Jasper e Percival descreveram uma sequência de racionais (Figura 2 – Resolução de Osana, Jasper e Percival para a Questão 6 do Questionário Q1) como se para cada racional houvesse um sucessor e, a partir dessa sequência, concluíram que a melhor alternativa para a pergunta “quantos racionais existem entre 2/3 e ¾” seria “muitos”. Essa ideia equivocada de sucessor para os números racionais pode surgir da extensão de uma propriedade válida para os números naturais e inteiros, e já foi detectada em algumas pesquisas, como Dias (2002) e Santos (1995 apud DIAS, 2002)[10], nas quais alunos responderam, por exemplo, que o sucessor de 2/3 é 3/3.

Figura 2 – Resolução de Osana, Jasper e Percival para a Questão 6 do Questionário Q1



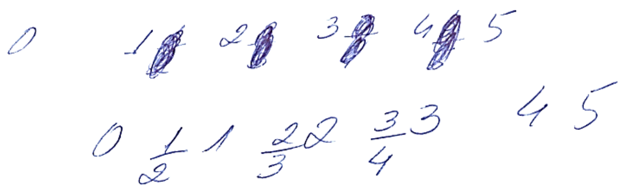
No caso de Zelma, nossa hipótese é que (ver Figura 3) na 1ª linha ela escreveu os números inteiros 0, 1, 2, 3, 4 e 5 e na 2ª linha formou frações nos intervalos (0,1), (1,2), (2,3) e (3,4), nos quais os numeradores são os extremos da esquerda e os denominadores são os extremos da direita de cada intervalo. Em seguida escreveu novamente os inteiros entre as frações, começando com o “1” após o “1/2” (o que está matematicamente certo e que pode ter influenciado seguir

10 SANTOS, V. de M. **Infinito: concepções e consequências pedagógicas**. 1995. São Paulo, 1995. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

a sequência), o "2" após o "2/3" e assim por diante. Seguindo esse raciocínio, a licencianda concluiu que entre 2/3 e 3/4 existe apenas um número, no caso, o número 2.

Figura 3 – Resolução de Zelma para a questão 6 do Questionário Q1

6) Se a sua resposta no item anterior foi 'a', 'b' ou 'c', determine um número racional que esteja entre 2/3 e ¾. Não apague o desenvolvimento do raciocínio.



Em relação à densidade dos irracionais (questão 6 do questionário Q2) obtivemos os seguintes dados, expostos na Tabela 2.

Tabela 2 – Densidade dos irracionais

Existe algum número irracional no intervalo (1/3, ½)? Em caso afirmativo, escreva esse número em notação decimal. Em caso negativo, justifique **(Questão 6 do questionário Q2)**

Resposta	Ação	Sujeitos
Sim	Apresentou um número irracional na forma decimal.	2/23
	Apresentou um número irracional na forma decimal a partir de √ ou π.	4/23
	Não apresentou um número irracional.	7/23
Não	[Sem justificativas].	2/23
Não soube responder ou deixou em branco	-	8/23

De acordo com a Tabela 2 – Densidade dos irracionais, a maioria dos sujeitos marcou "sim", mas apenas 6 justificaram apropriadamente, isto é, conseguiram escrever um número irracional no intervalo pedido. Destacamos a quantidade expressiva de licenciandos que não soube responder ou deixou em branco (8 sujeitos). Em situações bastante semelhantes, Dias (2002) aponta que alguns participantes responderam com números fora do intervalo, enquanto Boff (2006) atesta que, entre os que responderam que existem infinitos irracionais entre dois números racionais, nenhum deles conseguiu apresentar um exemplo sequer. Desse modo, percebe-se mais um indício de que a densidade, desta feita dos irracionais, é algo memorizado, mas não compreendido.

A questão mais genérica referente à densidade de racionais e irracionais era a questão 5 do questionário Q2. Na Tabela 3, apresentamos os dados dessa questão, os quais mostram que, nos itens “a”, “c” e “d”, a maioria da turma marcou a resposta correta, que era “verdadeiro”. O menor índice de acerto foi no item “b”, que fala da possível existência de um irracional entre dois irracionais. Resultados bastante semelhantes foram observados em Sirotic e Zazkis (2007) e em Melo (1999). Na nossa questão, apenas 7 dos 23 sujeitos acertaram os quatro itens e desses apenas 6 foram capazes de apresentar um número irracional no intervalo (1/3,1/2), sendo que 4 deles utilizaram, como havíamos detectado no Estudo Exploratório, números irracionais conhecidos como π ou $\sqrt{2}$ para obter um número no intervalo solicitado.

Tabela 3 – Densidade de racionais e irracionais (Questão 5 do questionário Q2)

Item	Verdadeiro	Falso	Em branco
Entre dois racionais há pelo menos um racional.	13/23	5/23	5/23
Entre dois irracionais há pelo menos um irracional.	9/23	7/23	7/23
Entre dois racionais há pelo menos um irracional.	14/23	2/23	7/23
Entre dois irracionais há pelo menos um racional.	12/23	4/23	7/23

Entre os 7 sujeitos que consideraram verdadeiras as quatro afirmações da Tabela 3, destacamos, no Quadro 9, as justificativas de quatro deles. Nas duas primeiras afirmações, Calvin interpretou a palavra “entre” de duas formas diferentes: como “alternativa” nas duas primeiras afirmações e como “lugar ou espaço intermediário” nas duas últimas. Ambas são interpretações possíveis para essa palavra, mas a segunda contém o significado mais próximo do que pretendíamos. Especificamente em relação a sua justificativa para a quarta afirmação, constatamos que ela é coerente com as definições de número irracional de Calvin (ver Quadro 7).

Quadro 9 – Justificativas de alguns alunos para a questão 5 do Questionário Q2

Afirmação	V	Justificativa

Entre dois racionais há pelo menos um racional.	X	Calvin – *Se os dois são racionais, logo pelo menos um é racional;* Hank – *Pois entre dois números racionais há infinitos números.;* Ernest – *Entre 1 e 2, existe* [illegible] *e* [illegible] *que também são racionais.*
Entre dois irracionais há pelo menos um irracional.	X	Calvin – *Mesma situação da questão anterior;* Hank – *Porque se há infinitos números entre estes, então tem que haver um irracional.* Ernest – *Entre* $\sqrt{5}$ *e* $\sqrt{7}$ *existe* $\sqrt{5}$.
Entre dois racionais há pelo menos um irracional.	X	Osana – *Sim. Exemplo 1 e 2, podem existir números irracionais.* Calvin – *Existem infinitos números irracionais entre dois números racionais.* Ernest – *Entre 1 e 2, existe* $\sqrt{2}$.
Entre dois irracionais há pelo menos um racional.	X	Calvin – *1,333... e 1,444... aqui o 1,4 seria um racional.* Ernest – *Entre* $\sqrt{3}$ *e* $\sqrt{7}$ *existe 2.*

Outras justificativas presentes no Quadro 9 nos fazem pensar que, apesar dos alunos terem considerado todas as alternativas da questão 5 verdadeiras (Tabela 3), ainda não entenderam completamente do que se trata a densidade. Vejamos por exemplo os casos de Hank, Osana e Ernest: Hank usa uma espécie de argumento probabilístico – já que há infinitos números entre eles, um deles deve ser irracional; Osana, ao citar que há um irracional entre 1 e 2, provavelmente se refere a $\sqrt{2}$; e Ernest utiliza apenas irracionais bem conhecidos (prototípicos) em forma de raiz.

Uma última resolução da questão 5 nos chamou atenção. O licenciando Titus considera frações com denominadores 13 e 23 como números irracionais, provavelmente porque a parte periódica das representações decimais dessas frações são grandes, além disso, o período não foi observado, como já havíamos apontado ter ocorrido em outras situações (Figura 4).

Figura 4 – Resolução de Titus para a questão 5 do Questionário Q2

5) Marque verdadeiro (V) ou falso (F) e justifique:

Afirmação	V	F	Justificativa
Entre dois racionais há pelo menos um racional	X		(7 , 8) $7<7,5<8$
Entre dois irracionais há pelo menos um irracional	X		$\frac{7}{17}<\frac{7}{13}<\frac{13}{23}$
Entre dois racionais há pelo menos um irracional	X		$0,1<\frac{13}{23}<0,6$
Entre dois irracionais há pelo menos um racional	X		$\frac{7}{13}<0,54<\frac{13}{23}$

Em relação às propriedades de incomensurabilidade e não enumerabilidade, avaliamos que não produzimos dados suficientes para proceder a uma análise capaz de proporcionar alguma conclusão e/ou contribuição para o ensino de números irracionais que estivesse à altura de um trabalho deste porte. A não enumerabilidade foi objeto apenas de uma aula expositiva, e, quanto à incomensurabilidade, foi realizada uma atividade, mas, pelas dinâmicas dos encontros, não demos prosseguimento a esse tema. Apesar disso, continuamos a entender que incomensurabilidade e não enumerabilidade são componentes importantes para se compreender com mais profundidade os números irracionais, tanto para professores, futuros professores e também estudantes.

4.4 – Existência dos irracionais

A questão 3 do questionário Q2 tratou da existência dos irracionais e foi uma reprodução da pergunta feita em Soares, Ferreira e Moreira (1998), “o que leva você a acreditar na existência de números irracionais?” (p. 64). A intenção foi aprofundar nosso diagnóstico a respeito do conhecimento e das concepções dos licenciandos referentes a esses números, além de estabelecer e comparar nossas respostas com as respostas obtidas em pesquisas anteriores, como Moreira (2004). Apresentamos no Quadro 10 as respostas que obtivemos, as quais foram divididas em quatro categorias principais.

Quadro 10 – Existência dos números irracionais	
O que te faz acreditar na existência de números irracionais? (Questionário Q2)	
Ideia central da resposta	N
Irracionais são descritos/aparecem pela/na matemática *Acredito pelo fato de ser descrito na matemática* (Casper). *Pelo fato de estudar na matemática, mas sinceramente, nunca me falaram sobre a importância, sei de sua existência, pois quando estudei só mostravam os conjuntos dos números, somente para que tomássemos conhecimento de sua existência* (Dixie). *O conhecimento matemático adquirido até o presente momento* (Rufus). *A presença de números irregulares em sua forma escrita* (Ulysses). *A percepção e obtenção dos mesmos nos resultados dos problemas e questões matemáticas* (Percival).	5/23
Irracionais são a expressão da inexatidão *O que não é real, sem valor inteiro* (Zelma). *Por que entre um número exato e outro existem "n" números, ex. 1... 2 pode existir 1,3; 1,4; ... Etc.* (Osana). *A percepção de que nem todos os números possuem divisão exata* (Cyrus).	3/23
Justificativas lógico-matemáticas *Pelo teorema de Pitágoras usando um quadrado de lado 1, a diagonal não é comensurável aos demais lados* (Wendell). *Medir ou mensurar com o máximo de exatidão possível os valores ou tamanhos de um cálculo ou objeto respectivamente falando* (Ernest). *A fórmula comprimento/diâmetro = π, esse fato me faz acreditar* (Hank).	3/23
Preenchimento de lacunas *Para mim não existe uma explicação, penso que existem para explicar alguma lacuna na matemática* (Octavio). *Os números irracionais existem para preencher lacunas, partem da necessidade de preencher espaços deixados por outras classes de número* (Felix). *A necessidade de preencher lacunas onde os números racionais não aparecem (usando como base os números reais)* (Sheldon).	3/23
Outras *Que os números podem ser infinitos, como as dízimas por exemplo* (Lilith). *De não conseguir escrever uma dízima periódica* (Jasper).	2/23
Não sabe/não lembra/em branco	8/23

A categoria "Irracionais são descritos/aparecem pela/na matemática" compreende respostas que são de certa forma redundantes, algo do tipo "acredito que existem porque existem", ou seja, que já partem do princípio de que os números irracionais existem. No Estudo Exploratório, as respostas redundantes também foram as mais citadas pelos sujeitos quando perguntamos por que se ensina números irracionais. Citamos o exemplo de um licenciando que escreveu *porque eles existem e interferem nos cálculos e aplicações do dia-a-dia*. Algumas respostas do Quadro 10 – Existência dos números irracionais, porém, apresentam algo que vai além da redundância. A resposta de Dixie, por exemplo (2ª resposta do Quadro 10 – Existência dos números irracionais), desvela uma possível relação com a autoridade da matemática e do professor de matemática. Soares, Ferreira e Moreira (1998) também encontraram respostas que confirmam nossa suspeita, como "quando estava na escola, conheci os irracionais e aceitei sua existência" (p. 79) e "talvez eu não acredite, apenas aceite" (p. 80).

Em nosso Estudo Exploratório, também surgiram referências a uma suposta inexatidão dos números irracionais. Naquela ocasião, perguntamos aos alunos ingressantes de 2013 por que se ensina números irracionais? Obtivemos duas respostas nesse sentido, que foram: *existem cálculos matemáticos não exatos* e *não é toda divisão que resulta em número inteiro, então temos que estudar também os quebrados, números irracionais*. A inexatidão também aparece em outras pesquisas, em respostas de estudantes veteranos de licenciatura em matemática (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1998), bem como de estudantes ingressantes no mesmo curso (MOREIRA, 2004).

As respostas da categoria "justificativas lógico-matemáticas" são aquelas que fazem menção aos elementos ou propriedades que têm relação estreita com o surgimento ou com a aceitação dos números irracionais, como a incomensurabilidade, os problemas de medida, o número π, entre outras. São respostas que um professor de matemática provavelmente consideraria "corretas". Porém, entendemos que elas também poderiam estar na categoria "Irracionais são descritos/aparecem pela/na matemática", pois não podemos descartar sua relação com a autoridade matemática, isto é, aceitação e repetição de algo que ouviram ou leram sem que isso reflita um conhecimento adquirido pelo sujeito. Todavia, para fazer isso, precisaríamos investigar o que pensam e sabem os licenciandos Wendell, Ernest e Hank com maior profundidade, o que não fizemos.

O "preenchimento de lacunas" também apareceu no Estudo Exploratório, mas quando perguntamos a definição de números irracionais. A função de completar a reta foi citada por quatro licenciandos pesquisados em Moreira (2004), sendo que um deles disse o seguinte: "os números irracionais servem para cobrir as lacunas na reta real, espaços que não podem ser representados nem por frações nem por inteiros, mas que existem" (MOREIRA, 2004, p. 165).

5 – Conclusão

Consideramos que o conhecimento prévio dos alunos que participaram de nossa pesquisa em relação aos números irracionais é bastante frágil, superficial e desconectado de outros conhecimentos.

Identificamos várias situações que podem ser interpretadas à luz do referencial teórico adotado, como a coexistência de imagens conflitantes na imagem do conceito de número racional e irracional e a predileção pelo uso de imagens em vez de definições. Além disso, o conhecimento demonstrado pelos licenciandos aproxima-se do que comumente é chamado de “decorado”, isto é, resultado de um processo de memorização apenas, sem estabelecer ligações ou relações com outros conhecimentos.

Observamos algumas situações relacionadas ao reconhecimento que merecem atenção, como a classificação de algumas frações e dízimas periódicas como números irracionais. Em relação à definição de número racional, a maioria da turma apresentou aquelas que são as definições mais frequentemente encontradas em livros didáticos de matemática, que caracterizam esses números como aqueles que podem ser escritos em forma de fração ou que são representados por dízimas periódicas. O mesmo não ocorreu em relação às definições apresentadas para os números irracionais. As definições mais frequentes caracterizaram os irracionais como números inexatos, incompreensíveis e imprevisíveis. Também foram registradas aquelas definições que poderiam ter sido retiradas de livros didáticos, as quais caracterizam os números irracionais como aqueles que não podem ser escritos em forma de fração ou aqueles que são representados por dízimas não periódicas.

Em relação à propriedade de densidade, detectamos diversas dificuldades, tanto em relação aos racionais quanto em relação aos irracionais. A maioria da turma mostrou-se insegura com essa propriedade, fato demonstrado principalmente pelas dificuldades para justificar a existência de um racional/irracional entre dois racionais/irracionais. Dificuldades com relação ao reconhecimento e à representação de números irracionais também influenciaram no baixo desempenho da turma nas atividades relacionadas à propriedade de densidade. No que diz respeito a uma justificativa para a existência dos irracionais, a turma apresentou uma variedade de respostas que refletem ideias truncadas ou vazias que precisam ser revistas ou completamente abandonadas. Justificativas como *para expressar a inexatidão* e *para preencher lacunas* expõem a falta de aprofundamento conceitual, enquanto *existem porque a matemática me diz que existem* refletem um total vazio conceitual e uma aceitação baseada na “autoridade da matemática” ou do professor de matemática.

Como reflexão após a análise dos dados apresentados, pensamos que um dos principais problemas com o ensino dos números irracionais é que, em geral, não são discutidas outras ideias além da definição e dos exercícios de reconhecimento. Dessa forma, constrói-se uma imagem do conceito dos números irracionais bastante limitada, o que vai de encontro com o que seria desejável. Segundo Giraldo (2004),

> O desenvolvimento cognitivo de um conceito matemático se dá através do enriquecimento de uma diversidade de ideias associadas ao conceito, e a compreensão da própria definição do conceito só é possível quando a gama de ideias associadas é rica o suficiente (p. 3).

As ligações entre os diversos elementos da imagem do conceito podem ser enriquecidas de diversas formas, pelo uso de atividades, exercícios, discussões, resolução de problemas, investigação e contraexemplos em aulas e em tarefas de casa. No caso do uso de contraexemplos, entendemos que se trata de um poderoso facilitador da aprendizagem que tem sido deixado de lado com o passar do tempo. Livros didáticos de matemática do passado, por exemplo, concediam mais espaço para os contraexemplos do que os livros atuais. Nesse viés, é relevante mencionar que nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, 2000) e na Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2016) não encontramos referências ou qualquer tipo de estímulo ao uso de contraexemplos. Novamente falando nos números reais, um contraexemplo importante em relação à questão do corpo ordenado seria pensar que no caso dos números complexos, não existe essa noção. Dados dois pontos em R^2, não faz sentido falar que um deles é "maior" do que o outro.

Além do enriquecimento da imagem do conceito dos números irracionais, uma outra questão, diretamente relacionada a essa, e que tem nos preocupado atualmente, refere-se ao tratamento que é dado aos números como um todo. Historicamente, a ideia de número moveu-se do discreto para o contínuo, isto é, do número como resultado de um processo de contagem para o número como resultado de uma medida. Posteriormente, com os números complexos e quaternários, a noção de número libertou-se até mesmo da noção de medida. Porém, o que observamos é que, no ensino básico, número ainda é muito atrelado à questão do discreto e aos processos de contagem. Pesquisas como Bass (2015) e Moxhay (2008) apontam para os benefícios de uma abordagem do número como medida desde cedo na educação das crianças. Tendo em vista as problemáticas suscitadas, concluímos que precisamos pensar mais a respeito desse tema em trabalhos futuros.

Referências

ARCAVI, A.; BRUCKHEIMER, M.; BEN-ZVI, R. History of mathematics for teachers: the case of irrational numbers. **For the Learning of Mathematics**, v. 2, n. 7, p. 18-23, 1987.

BASS, H. Quantities, numbers, number names and the real number line. In: ICMI 23, 2015, Macau. **Anais...** Macau: ICMI, 2015, p. 10-20.

BOFF, D. S. **A construção dos números reais na escola básica**, 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum** – proposta preliminar. 2ª versão revista. MEC/Consed/Undime. Brasília: Ministério da Educação, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf>. Acesso em 06 abr. 2017.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2000.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROETTO, G. C. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes da licenciatura em matemática**, 2016. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Um modelo para analisar a imagem do conceito de estudantes universitários: o caso dos números irracionais. **Vidya** (no prelo, 2017).

CEZAR, M. DOS S. **Produções de significados matemáticos na construção dos números reais**, 2014. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

______. **Concepções acerca do conceito de números reais**: uma breve reflexão sobre seu ensino na educação básica, 2011. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática). Universidade Federal do

Espírito Santo, São Mateus, 2011.

DIAS, M. DA S. **Reta real**: conceito imagem e conceito definição, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2002.

DOMINGOS, A. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados** – a matemática no início do superior, 2003. Tese (Doutorado em Ciências da Educação). Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.

FISCHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. **Educational Studies in Mathematics**, v. 29, p. 29-44, 1995.

GIRALDO, V. A. **Descrições e conflitos computacionais**: o caso da derivada, 2004. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia de Sistemas e Computação). Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

HERSHKOWITZ, R. Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v. 32, p. 3–31, 1994.

IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. A. DA. Conhecimentos das concepções prévias de estudantes sobre números reais: um suporte para melhoria do ensino-aprendizagem. 21a Reunião Anual da Anped. **Anais...**, 1998, Caxambu.

LINS, R. C. O modelo dos campos semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: C. L. ANGELO; E. P. B. et al. (Orgs.) **Modelos dos campos semânticos e educação matemática**. São Paulo: Midiograf, p. 11-30, 2012.

MELO, S. B. DE. **A compreensão do conceito de número irracional:** uma radiografia do problema e uso da história como uma alternativa de superação, 1999. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências). Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 1999.

MOREIRA, P. C. O **Conhecimento matemático do professor:** formação na licenciatura e prática docente na escola básica, 2004. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

MOSCA, M. A. **Números irracionais no Ensino Médio:** desdobrando o tema com equações polinomiais, 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

MOXHAY, Peter. Assessing the scientific concept of number in primary school children. In: ISCAR. **Anais**... San Diego: ISCAR, 2008. p. 1–24.

SIROTIC, N.; ZAZKIS, R. Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 65, n. 1, p. 49–76, 2007.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, n. 77, p. 20-26, 1976.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. **Números racionais e reais** – as concepções dos alunos e a formação do professor. Belo Horizonte: UFMG/SPEC/CAPES, 1998.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational studies in mathematics**, v. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p.65–81, 1991.

VINNER, S. The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. **ZDM**, v. 43, n. 2, p. 247-256, 2011.

Educação matemática e educação escolar tupinikim e guarani

Claudia A. C. de Araujo Lorenzoni
Lígia Arantes Sad
Circe Mary Silva da Silva
Laira Lamburghini Brandão Ribeiro

Introdução

> *Eu acho que [os alunos] conseguiram perceber mais essas coisas, dar valor, não é? Por exemplo, a cestaria, a gente vê todo dia, faz, leva, vende, não é? Mas só que ninguém comenta sobre isso, o valor que tem, a história que tem. Porque todos os objetos que a gente vê, por exemplo, hoje em dia, têm a sua história. Isso aí não partiu da gente, assim, de uma hora prá outra* (Educadora guarani *Ara*. In: LORENZONI, 2010, p. 189).

No Brasil, o termo Tupinikim é por vezes sinônimo de "nacional", "brasileiro". Mas o emprego do termo pouco ajuda a revelar a existência e a história desse povo que habita o Brasil desde antes da chegada dos colonizadores portugueses. Com aldeias situadas no estado do Espírito Santo, os Tupinikim, juntamente com os Guarani, vivem no município de Aracruz, ao Norte do Estado, ocupando uma área de 18212,3314 hectares de extensão, segundo a Fundação Nacional do Índio (Funai)[11]. Dados de 2014[12] indicam um total de 3.018 indígenas habitando a região, sendo a maioria Tupinikim.

Cada um desses povos traz na sua história saberes e fazeres próprios, em virtude dos quais se identificam entre si e partilham suas experiências, concepções e crenças. A educação escolar praticada por eles nas suas escolas tem buscado, cada vez mais, evidenciar seus elementos culturais, como a língua, a alimentação e a relação com a natureza. A proposta estende-se à educação matemática, sendo importante a interação entre o social, o contexto escolar e o desenvolvimento do fazer matemático.

---

11 Disponível em: <http://www.funai.gov.br/index.php/indios-no-brasil/terras-indigenas>. Acesso em: 25 ago. 2017.

12 Instituto Socioambiental. Disponível em: <https://terrasindigenas.org.br/pt-br/brasil>. Acesso em: 25 ago. 2017.

Nesse movimento, os momentos de educação não formal[13] são especiais possibilidades de abertura de diálogos e de observação, gerando entre os educadores indígenas e não indígenas conhecimentos sobre a cultura do outro, compartilhados com valores e sentimentos de pertencimento, que podem ser incorporados à educação formal (GOHN, 2010).

É nesse âmbito, dos relacionamentos entre a educação formal e não formal, que se inserem várias ações do *Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Ensino Médio – GRUPEMEM – e do Grupo de História e Filosofia da Ciência – HISTOFIC –*, do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes). Ambos buscam desenvolver ações educacionais que contemplem grupos minoritários ou comunidades específicas participantes da diversidade cultural presente no Espírito Santo, entre elas, as comunidades Tupinikim e Guarani.

Na educação escolar indígena atual, em especial no desenvolvimento do pensar e fazer matemático, há possibilidades para uma articulação mais dinâmica entre conhecimentos curriculares e interações com princípios e elementos étnicos singulares, como a língua, os artefatos de fabricação própria e os modos de explicar e de se relacionar a eles. Com essa valorização e presentificação cultural, nas escolas indígenas tem-se buscado trabalhar uma incorporação entre significados matemáticos e outros do contexto indígena, de modo que o ensino e a aprendizagem escolar possam ocorrer com sentido, participação e qualidade almejada aos aprendizes.

Imbuídos dessa pretensão maior, pesquisadores, professores e estudantes do Ifes, em parceria com professores da comunidade Tupinikim e Guarani, têm desenvolvido ações educacionais imbricadas entre matemática e característica da cultura dessa comunidade, como: cestaria indígena, pintura corporal, jogos e brincadeiras culturais, construções de moradia e espaços específicos, etc. Neste texto, apresentamos a seguir uma síntese das análises de duas ações assim vivenciadas.

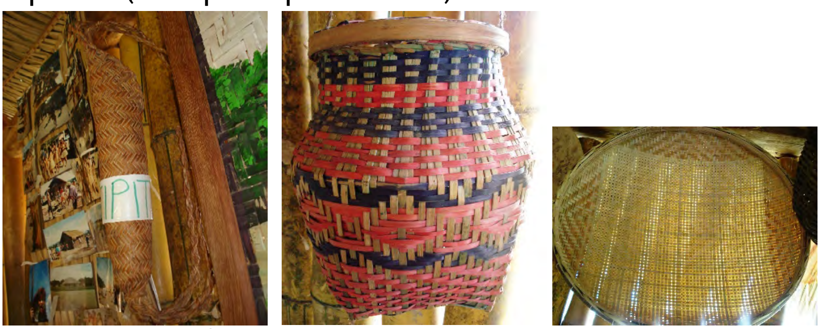
Cestaria e matemática escolar

Para os Guarani e Tupinikim, um dos objetivos da educação escolar é buscar resgatar e preservar elementos da sua cultura. Algumas obras que refletem um pouco desse trabalho são *Arãdu Porã Rape* (MENDES, 200?), *A,*

13 Consideramos a educação não formal, segundo Gohn (2014, p. 35), "(...) aquela que se aprende 'no mundo da vida', via os processos de compartilhamento de experiências, principalmente em espaços e ações coletivas cotidianas".

B, C de Irajá (SANTOS, 2017) e *Îandé nhe'engara, îandé anga, îandé r-ekobé*: *Nosso canto, nossa alma, nossas histórias* e *Ma'ety Regwa*, as duas últimas, em vias de publicação[14]. O conteúdo em cada uma das obras é resultado de um trabalho de pesquisa protagonizado pela comunidade escolar e, em 2017, uma nova pesquisa foi iniciada, abordando os trançados dos dois povos. Tendo em vista que ambos os grupos julgam que a prática de confeccionar objetos trançados corre risco de desaparecer esta pesquisa visa a: oferecer estímulo para que os trançados sejam produzidos pelas famílias; registrar modos de produção e de vida de artesãos; registrar fases do tempo propícias para retirada de matéria-prima; e mapear os poucos locais dos quais ainda se pode retirar matéria-prima. Estão sendo investigados cestos (Figura 5), chocalhos, abanadores e trabalhos de ornamentação, por exemplo, em arcos (Figura 6).

Figura 5: Exemplos de cestos pesquisados: tapiti, samburá e peneira (da esquerda para a direita)



Fonte: Acervo pessoal

Figura 6: Chocalhos e abanadores (à esquerda). Ornamentação de arcos com trançados (à direita)

Fonte: Acervo pessoal

14 Sob organização do *Programa Ação Saberes Indígenas da Escola*, instituído pela Portaria n. 1.061 de 30 de out. de 2013 do Ministério da Educação.

Trataremos aqui, particularmente, sobre o cesto Guarani e sobre algumas experiências realizadas com estudantes e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental da Escola Guarani.

Tomaremos como referência a ideia defendida por autores como Ubiratan D'Ambrosio (2007) de que cada grupo cultural desenvolve seus saberes e fazeres em conexão com seu contexto histórico, social, ambiental, político, etc. Tais saberes e fazeres dizem respeito, inclusive, a processos como comparar, classificar, contar, ordenar, medir, entre outros, que estão associados ao que chamamos de matemática.

O *adjaka ete* dos Guarani

O cesto está na origem do povo Guarani. A mulher foi criada de um cesto, como se lê em Lorenzoni (2009), fato descrito a partir do relato de um ancião:

> *Primeiro tinha só os homens, só os homens, não tinha mulher. Aí, falava assim:*
>
> *– Puxa vida! A gente tá precisando de mulher porque a mulher pode ajudar nós, ajudar a fazer comida, ajudar a fazer as coisas.*
>
> *Então, o Deus falou assim:*
>
> *– Puxa vida! Eu vou, eu vou fazer uma mulher, de um cesto.*
>
> *Ele tava fazendo um cesto. Então, ele, daquele cesto, transformou numa mulher. Foi assim que Deus fez. Então, a história do cesto é assim: que Deus tava fazendo um cesto e daquele cesto que transformou numa mulher. Aí, falou assim:*
>
> *– Bom, eu vou fazer, mas você não pode bater. Não pode bater na mulher. Se você bater na mulher ela vai transformar num cesto de novo. Aí nunca mais vai ter mulher na terra.*
>
> *Um dia, ele fez uma mulher. Transformou um cesto numa moça. Depois, essa moça tava cuidando das coisas, assim, na casa. Ela tava rindo, brincando com os homens ali. O outro tava com ciúme dela:*
>
> *– Puxa vida! Por que você tá brincando com ele?*
>
> *Tava com ciúme. Aí, pegou essa moça e deu uma lambada na bunda da moça. Naquela hora então, a moça virou cesto. Aí, ele ficou sem mulher. Foi lá falar com Deus de novo:*
>
> *– Puxa vida! Aquele cesto que o Senhor transformou numa moça... Depois ela virou cesto de novo.*
>
> *– Então você bateu nela.*
>
> *– É. Bati mesmo...*
>
> *– Eu falei que você não pode bater. Então, eu vou transformar de novo, mas você não pode bater na mulher porque ela é sagrado. Vai ter nenenzinho, que*

vai ser criancinha... Pra cuidar das crianças... Então, com isso, você nunca mais pode bater na sua mulher.

Aí, então, é por isso que, até hoje, não se pode bater na mulher. Porque mulher é sagrado.

Como se vê, o mito Guarani da origem da mulher, criada por Deus a partir de um cesto, é rico em simbolismos que transcendem a condição material e utilitária do cesto. O ventre da mulher, semelhantemente a um cesto, tem a capacidade de carregar um bebê. A exemplo do cesto, ela é forte para carregar produtos coletados ou cultivados na terra, mas, também como o cesto, a mulher é delicada e não pode ser molestada.

Na memória cultural coletiva expressa na fala guarani sobre o cesto, destaca-se a importância do que eles chamam *adjaka ete*, o cesto verdadeiro. Este cesto parece estar associado a uma identidade Guarani. A busca por conhecer o *adjaka ete* levou a categorias como uso, forma, cor, matéria-prima, estrutura de trançado, técnica de confecção e ornamentação.

Mas, afinal, o que é o *adjaka ete*? Vamos procurar responder, destacando ideias matemáticas associadas, inclusive na língua Guarani, sempre que possível.

Tamanho

Considerando práticas tradicionais guarani, o cesto é de tamanho grande (*adjaka guatxu*) o suficiente para ser repousado sobre as costas de quem o carrega, geralmente mulheres (Figura 7).

Figura 7: Mulher carregando cesto

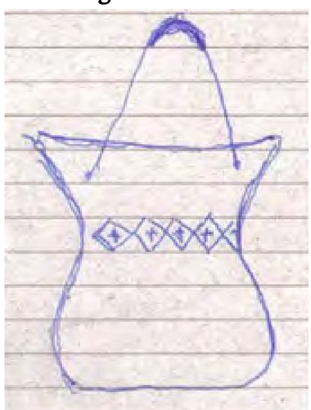
Fonte: Lorenzoni (2010). Autoria: Tupã Kwaray (ancião guarani)

Cestos menores podem ser usados para armazenamento de alimentos, objetos da casa ou objetos pessoais. Servem também como brinquedo para as meninas, pois acredita-se que ocupando-se com seus pertences as crianças vão se tornando menos dependentes da atenção materna.

Forma

O *adjaka ete* (Figura 8) tem forma acinturada (*adjaka iku'atxo wa'e*) e "boca aberta" (*adjaka djurupeto*), para favorecer o transporte nas costas, sustentado por uma faixa que é apoiada na testa.

Figura 8: Forma de um cesto guarani



Fonte: Lorenzoni (2010). Autoria: Tupã Kwaray (ancião guarani)

As variadas finalidades e aspectos de outros cestos (Figura 9) levam a denominações de acordo com suas formas, como "cesto retinho" (*adjaka po'i*), "cesto bojudo" (*adjaka ryepui*), "cesto achatado" (*adjaka pe'i*) e peneira (*yrupẽ*).

Figura 9: Cestos de formas variadas

Fonte: Claudia Araujo Lorenzoni

Ornamentação

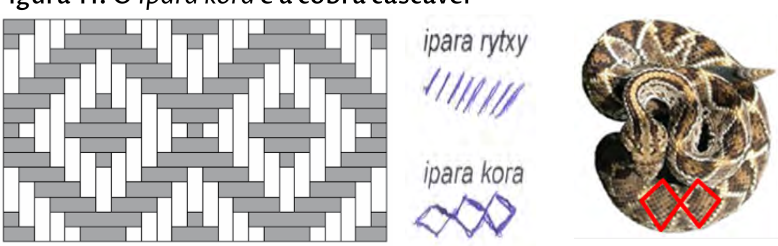
A cor do *adjaka ete* vem das fibras vegetais empregadas na sua confecção (Figura 10): lâminas extraídas do tronco de um tipo de gramínea (taquara) para o trançado e de um tipo de cipó (cipó-imbé) para a ornamentação.

Figura 10: Preparo das fibras para confecção de cesto

Fonte: Claudia Araujo Lorenzoni

Um grafismo frequentemente usado na ornamentação do bojo do cesto é o *ipara kora* (desenho cercado). No trançado, o desenho remete à forma de um quadrado ou losango, embora não possa ser traduzido assim, pois, em outros contextos, o termo *kora* designa somente a ideia de linha fechada. Os Guarani costumam associar o *ipara kora* à cobra cascavel (Figura 11).

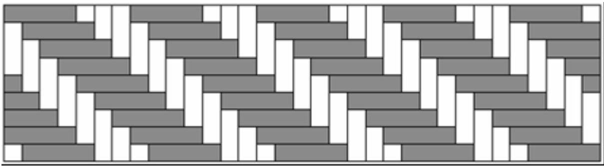
Figura 11: O *Ipara kora* e a cobra cascavel



Fonte: Lorenzoni (2010)

Outro grafismo de destaque está associado, talvez, ao movimento de formação de um cardume no rio. Ele é confeccionado de modo que as fibras estão sempre enfileiradas (Figura 12), deslocando-se em uma lâmina a cada novo nível, os Guarani denominam de *ipara rytxy* (desenho em fila).

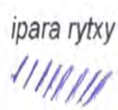
Figura 12: *Ipara rytxy*



Fonte: Lorenzoni (2010)

Se compararmos o grafismo da Figura 13, que pode ser associado a uma relação de paralelismo com a representação (Figura 14) feita por um dos sábios da comunidade, perceberemos que o conceito de retas paralelas é o aspecto que se destaca no *ipara rytxy*.

Figura 13: Representação do *ipara rytxy* por retas paralelas



Fonte: Lorenzoni (2010). Autoria: Tupã Kwaray (ancião guarani)

Depois das descrições, apresentamos, então, o *adjaka ete* (Figura 14), cesto originalmente guarani, usado para transporte tanto de alimento, quanto de crianças em situações cotidianas ou em celebrações rituais.

Figura 14: Cestos guarani

Fonte: Lorenzoni (2010)

A versão da imagem à esquerda foi coletada por Egon Schaden em 1951, em outra região do Brasil. Os exemplares da direita foram confeccionados em 2009.

Motivados pelas relações de comércio com turistas, os Guarani acrescentaram outro tipo de cesto ao seu repertório (Figura 15). Este pode ser trançado com fibras de gramíneas, não é decorado com cipó e costuma ter cores obtidas do tingimento das fibras com produtos industrializados.

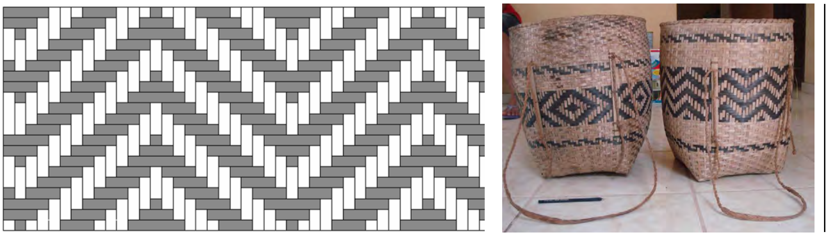
Figura 15: Cesto com fibras tingidas

Fonte: Claudia Araujo Lorenzoni

Cestaria na escola

Quando analisamos a ornamentação de cestos Guarani, mais tradicionais ou mais inovadores, encontramos ideias que podem ser classificadas como matemáticas. É o caso do *ipara kora*, do *ipara rytxy* e de algumas de suas variações. O *ipara rytxy karẽ wa'e* designa o ziguezague, do termo *karẽ*, que tem o sentido de ondulado, sinuoso, com curvas. Considerando que no trançado temos padrões geométricos que podem ser associados a linhas com quebras, segmentos de retas, que formam ângulos, é possível relacionar os grafismos dos desenhos que as tramas dos cestos formam com conceitos da geometria plana elementar.

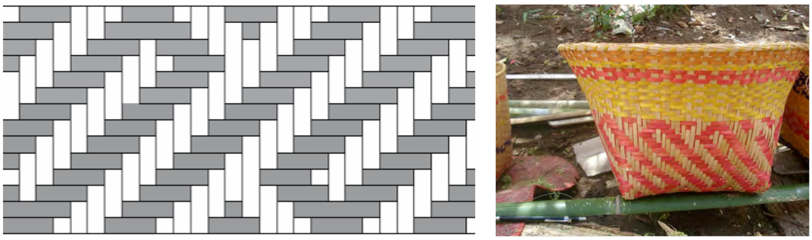
Figura 16: ***Ipara rytxy karẽ wa'e*** **em ornamentação de cesto**



Fonte: Lorenzoni (2010)

Um desenho que vem sendo empregado na ornamentação de cestos por alguns artesãos lembra a forma de retângulos e costuma ser descrita em língua Guarani como *ipara kora puku*, que etimologicamente significa "*ipara kora* comprido", uma vez que nessa língua não se encontra uma palavra específica para retângulo.

Figura 17: ***ipara kora puku*** **em ornamentação de cesto**

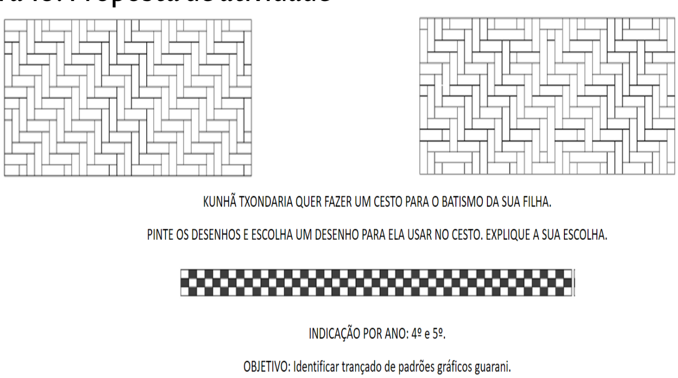


Fonte: Lorenzoni (2010)

Buscamos explorar essas e outras ideias, bem como os valores e significados da cestaria Guarani, por meio de atividades desenvolvidas na escola Guarani com turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental. O material foi elaborado em 2010, no desenvolvimento de uma pesquisa de doutorado do pesquisador Lorenzoni (2010) e passará por uma revisão para ser incorporado ao desenvolvimento da pesquisa atual. A seguir, apresentamos alguns extratos do material.

A Figura 18 apresenta uma proposta de atividade com a qual se espera que o estudante explore a representação de trançados no plano e também que pesquise e reconheça o *ipara rytxy* em práticas tradicionais Guarani.

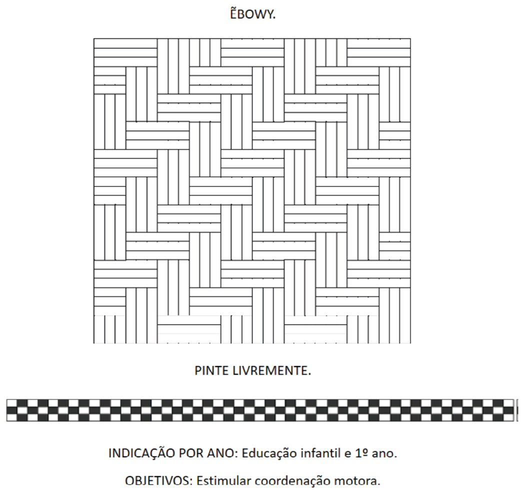
Figura 18: Proposta de atividade



Fonte: Lorenzoni (2010)

As malhas de trançados foram usadas também com crianças na Educação Infantil, porém para pintura livre. Na Figura 19, destacamos indícios da intenção da criança, revelada à professora, de pintar em fileira, como no *ipara rytxy.*

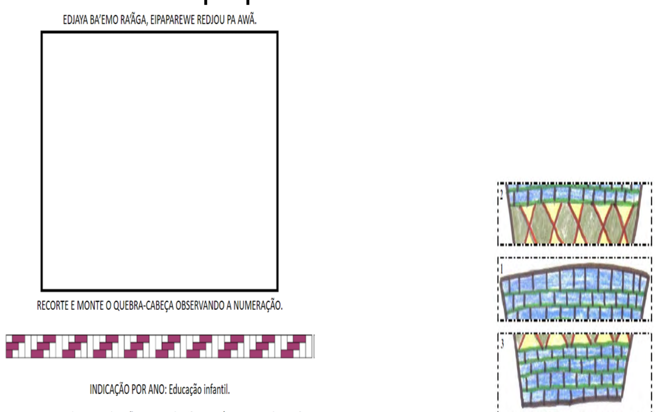
Figura 19: Atividade proposta e desenvolvida



Fonte: Lorenzoni (2010)

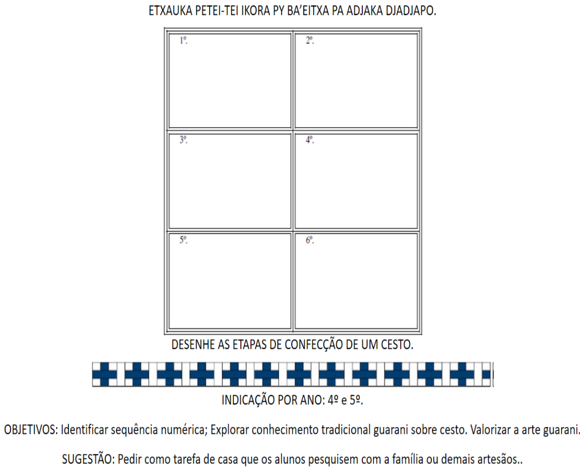
A ideia de ordenação de números naturais foi contemplada em atividades lúdicas, como quebra-cabeças e, também, associada à pesquisa sobre processos de confecção do cesto.

Figura 20: Atividade proposta



Fonte: Lorenzoni (2010)

Figura 21: Atividade proposta

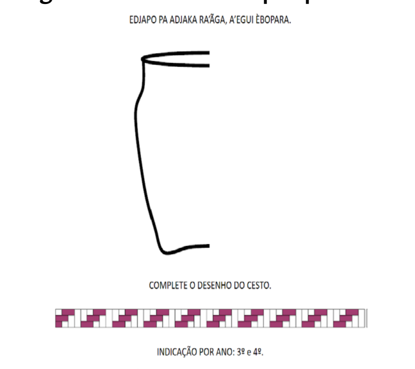


Fonte: Lorenzoni (2010)

As atividades foram construídas em conjunto com os professores Guarani e proporcionaram momentos de trocas, planejamento e criatividade.

Na Figura 22, a atividade tinha sido elaborada com o objetivo de explorar a ideia de simetria e tinha o seguinte enunciado: "Complete o desenho do cesto". O esperado era que os alunos apenas completassem o desenho do cesto, usando a simetria, mas, para nossa surpresa, eles tiveram outro entendimento. Para eles, o cesto tem não apenas forma, mas também cor, textura e, assim, com esse entendimento, eles realizaram a atividade, como ilustra o lado direito da figura 26.

Figura 22: Atividade proposta



Fonte: Lorenzoni (2010)

O trabalho de pesquisa e elaboração das atividades, em conjunto com os professores Guarani, tem proporcionado um aprendizado de ambas as partes, indígenas e não indígenas. Para os educadores indígenas, algumas ideias abstratas da matemática escolar, como simetria, quadrados, ângulos, paralelismo, entre outras, podem ser melhor compreendidas se forem introduzidas com elementos de sua cultura. Nessa perspectiva, como o material que reúne essas questões inexiste, é fundamental que seja construído. Para nós, não indígenas, a experiência com o olhar interdisciplinar dos povos indígenas é uma provocação à reflexão da nossa prática de professor e dos valores e significados que a matemática escolar produz ou deveria produzir.

Os motivos gráficos na cestaria guarani revelam padrões geométricos interessantes que podem ser utilizados no ensino e aprendizagem de matemática. As atividades com esses padrões, realizadas com educadores indígenas em cursos de formação, indicaram a pertinência de aproveitamento no ensino, uma vez que contribuem não apenas para a apropriação de saberes geométricos, mas, acima de tudo, mostram que saberes milenares desse povo são também tão válidos quanto os saberes científicos. Trazer esses saberes para a sala de aula é uma maneira de mantê-los culturalmente vivos.

Um jogo tupinikim e possibilidades na matemática escolar

O jogo, enquanto elemento cultural, é uma "forma específica de manifestação da atividade humana na criança" (OCTÁVIO; ARAÚJO, 2016, p. 47) e possibilita a criança aproximar-se de ações do adulto, compreender fazeres de sua comunidade, apropriar-se de "relações, objetos, conhecimentos e ações" (NASCIMENTO; ARAÚJO; MIGUÉIS, 2010, p. 127) que foram historicamente criados pela humanidade. Sendo o jogo um elemento cultural, está incrustado de outros significados e elementos culturais que o constituem, como: o material, as regras, as estratégias, as relações interpessoais, dentre outros.

As negociações entre a imaginação dos participantes e as regras centrais, juntamente com a ação do educador, levam o aluno à zona de desenvolvimento. Segundo Moura (1990), justamente

> Dentro dos pressupostos em que situamos o jogo, fica claro qual deve ser o seu uso e como ele pode contribuir na Educação Matemática. O jogo tem um curso natural que vai da imaginação pura para a experimentação e apreensão do conceito. No princípio se é solicitado a jogar. E o jogo puro, é a brincadeira que instiga o imaginário, é a fantasia que, através das regras, vai levar ao desenvolvimento do jogo e ao conteúdo sistematizado (MOURA, 1990, p. 65).

Para o psicólogo russo Elkonin (1978), os dados etnográficos dos jogos contêm alguns pontos de partida que podem ajudar a compreender a essência psicológica do jogo. Segundo ele, como um elemento da cultura, o jogo despertou, desde muito tempo atrás, o interesse de estudiosos que pesquisam sobre a estética. O jogo desempenha um papel importantíssimo na educação infantil, uma vez que ele tem uma afinidade com a natureza da criança. Essa afinidade, como afirma Elkonin, não é de natureza biológica, mas sim social, trata-se da necessidade que a criança tem de se comunicar com os adultos. Considerando tais contribuições e também outras desse mesmo psicólogo, desenvolvemos as intervenções educacionais que serão apresentadas a seguir.

"Jogo do milho queimado": uma brincadeira tupinikim

Em julho de 2017, por meio do Programa Ação Saberes Indígenas na Escola, tivemos a oportunidade de ministrar uma oficina de Matemática para professores indígenas do município de Aracruz. A oficina contou ainda com estudantes da licenciatura em matemática e do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – Pibic, do Ifes, os quais atuaram como monitores no desenvolvimento das atividades propostas.

A oficina teve como objetivo proporcionar a experiência de um "fazer matemático", procurando identificar possibilidades pedagógicas nos jogos indígenas. Consideramos pertinente abordar com os professores a reflexão sobre a importância do jogo no contexto indígena e discutir suas potencialidades no ensino da matemática escolar. Para isso, escolhemos um jogo tupinikim, o "Jogo do milho queimado" (MAGALHÃES, 2007), devido a seu valor cultural, explorando, propondo e discutindo, juntamente com os professores, situações desencadeadoras de aprendizagem. É importante registrar que o milho é um alimento tradicional dos Guarani – *avax-ti eti'i* (milho sagrado) (LOUREIRO; TEAO, 2010).

Metodologia

O "Jogo do milho queimado" possui como peças grãos de milho e cada jogador escolhe apenas seis grãos e os queima em uma face (Figura 23) com um palito resistente e quente. A cada partida, os jogadores, sentados em roda no chão, lançam os seus grãos e o jogador que tiver menos grãos queimados virados para cima deixa o jogo, até que reste apenas um jogador, o vencedor. Esses grãos, ao final do dia, são lançados fora e, no próximo dia, escolhem-se novos grãos.

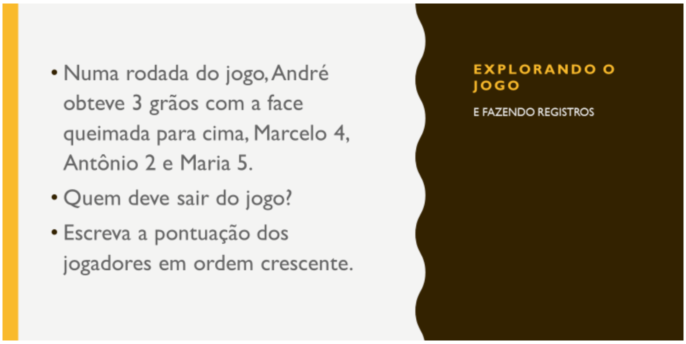
Figura 23: Grãos de milho com faces queimadas e não queimadas.

Fonte: Acervo Pessoal

Situações desencadeadoras para o ensino de matemática foram propostas a partir desse jogo e levamos aos professores para que fossem discutidas as potencialidades e possibilidades de sua utilização. Além de observar a contagem numérica possível, propusemos a variação do jogo para contemplar outros campos da matemática, bem como o pensar lógico dos participantes durante as jogadas e a combinação de outras regras.

Planejamos, assim, fichas (Figura 24) com problemas matemáticos que nos ajudariam a conduzir as intervenções durante a oficina. Elas foram organizadas em faixas segundo as classes, 1º ao 4º ano do Ensino Fundamental 1, 5º ao 8º ano do Ensino Fundamental 2 e 1º ao 3º ano do Ensino Médio, nas quais abordamos os campos matemáticos Números, Operações e Álgebra. Nosso propósito era de que os próprios professores indígenas participantes adentrassem outros campos matemáticos de acordo com sua experiência e sua criatividade.

Figura 24: Exemplo de Ficha utilizada



Fonte: Acervo Pessoal

Ao separarmo-nos em três grupos, tivemos a oportunidade de explorar o jogo. Inicialmente, jogando a forma apresentada e, aos poucos, na experiência do jogar, foram incluídas sugestões de alteração nas regras, proporcionando variações do jogo. Com o registro dessas novas variações, modificaram-se abordagens da matemática a partir do jogo e perceberam-se dificuldades possíveis de serem encontradas pelos professores na utilização do jogo como metodologia de ensino. Ademais, alguns conteúdos curriculares de matemática foram indicados.

Figura 25: Grupo de professores jogando

Fonte: Marli Gomes dos Santos

Resultados e discussões

Uma das primeiras reflexões foi sobre a semelhança ao jogo de lançamento de dados. No caso do dado, temos seis possibilidades de resultado (1 a 6) e, no caso dos grãos, temos sete possibilidades, de 0 (quando não aparecem grãos queimados) a 6. A vantagem do "Jogo do milho queimado" pode estar no fato de que é possível criar regras com os grãos queimados e não queimados e envolver os alunos com outros elementos da cultura local, por meio da utilização de materiais que, como o milho, também fazem parte do seu cotidiano. Nesse sentido, foi sugerido por uma professora, para a adequação à idade dos alunos e pela proximidade com a praia, que se utilizasse, como alternativa aos grãos de milho, búzios, conchas ou palitos de picolé com uma de suas faces pintadas. Indicações de materiais do ambiente local são também comentadas por Grando (2010, p. 26), quando este afirma que "a criatividade dos indígenas na construção dos jogos e no uso de materiais encontrados somente na natureza circundante de suas terras deve ser registrada e ensinada aos não indígenas".

O jogo original traz a situação da escolha dos grãos e do seu preparo pelo jogador. Ao utilizarmos os grãos já prontos na oficina, percebemos que alguns grãos são irregulares e podem não mostrar nenhuma das faces esperadas. Daí a vantagem de integrar os alunos no preparo do material, com a produção e controle, como vemos no relato de um professor:

> *"(...) Na aldeia, as crianças aprendem a pescar, brincando de pescar. Aprendem a fazer casa, brincando de fazer casa. É assim com armadilhas e artesanatos".*

É na preparação do material e no fazer de conta durante o jogo que a criança apropria-se e reproduz a atividade do adulto, além de, nesse movimento, constituir-se humano. Na conclusão discursiva o mesmo professor comentou:

> *"os alunos precisam realmente de um ensino diferenciado e descontraído, pois crianças aprendem muito através de brincadeiras".*

Durante toda a oficina surgiram ideias de situações educativas, variações dos jogos, reflexões sobre a utilização dos jogos, como metodologia de ensino e dificuldades que poderiam ser encontradas durante o jogo. Nas reflexões sobre conteúdos curriculares potencialmente abordados, foram indicados números naturais, classes decimais, algoritmos de soma e paridade. Segundo eles: "*Uma coisa tão simples, como os seis grãos, abriu um leque grande de possibilidades*".

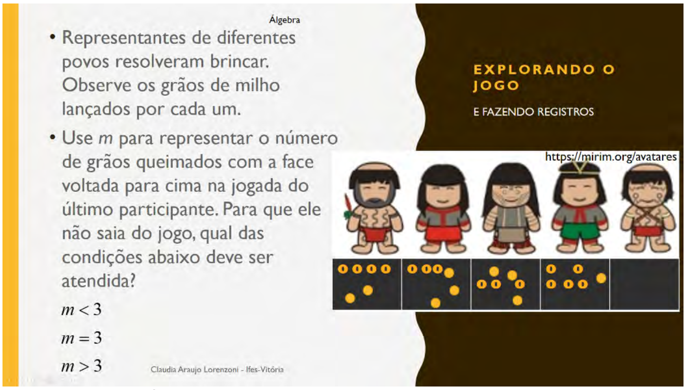
Ilustramos apresentando, a seguir, alguns problemas que foram propostos aos professores. O enunciado pede que se avaliem condições para a permanência de um participante no jogo, conhecendo-se o número de grãos queimados dos demais participantes.

Figura 26: Ficha Explorando o Jogo

Fonte: Acervo Pessoal

O objetivo com o enunciado é comparar quantidades e também propor problemas com mais de uma solução. A resposta poderia ser qualquer jogada com uma quantidade maior que 3 grãos queimados. Uma variação do mesmo enunciado, a qual se seguirá abaixo, propõe o uso de notação algébrica na resolução do problema, ou seja, $m>3$ (onde "m" representa a quantidade de milho queimado).

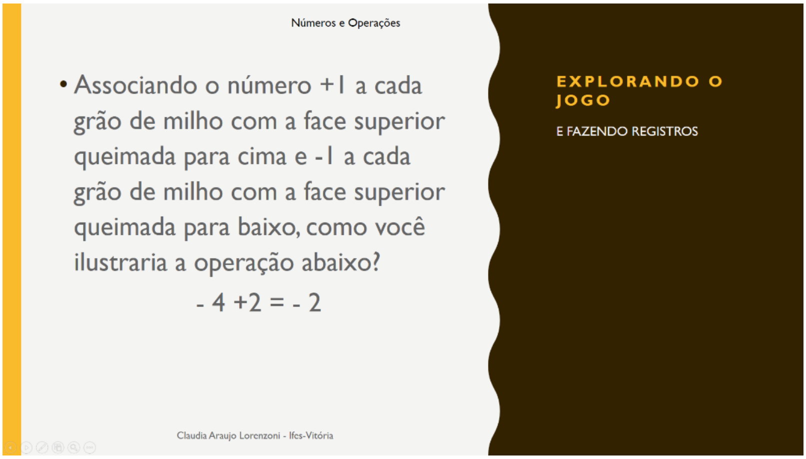
Figura 27: Ficha Explorando o Jogo



Fonte: Acervo Pessoal

O uso dos grãos de milho com faces queimadas e não queimadas permitiu explorar a ideia de adição com números relativos, como mostra o enunciado da figura seguinte.

Figura 28: Ficha Explorando o Jogo



Fonte: Acervo Pessoal

Com relativa surpresa, os professores puderam observar que cada "grão positivo" anularia um "grão negativo" (Figura 29), concluindo que – 4 + 2 = – 2.

Figura 29 – Ilustração da operação

Grãos positivos / Grãos negativos

Fonte: Acervo pessoal

Essas e outras experiências com o "Jogo do milho queimado" tornaram a oficina produtiva em termos de reflexões sobre o pensar matemático e a participação coletiva, as quais se manifestaram por meio de comentários bastante positivos dos professores, um deles, que já foi até mesmo exposto neste artigo: "*Uma coisa tão simples, como os seis grãos, abriu um leque grande de possibilidades*".

Assim, a partir do jogar, do experimentar, do testar, pudemos acompanhar a criação de muitas variações do jogo para atender às necessidades específicas de cada grupo, necessidades como quantidade de pessoas para jogar, grãos irregulares e curiosidades. Destacamos algumas observações sobre as variações realizadas pelos professores:

- O número de grãos pode ser alterado conforme interesse do professor ou dos jogadores;
- Tendo os estudantes observado que é pequena a chance de sair todas as faces iguais (só queimadas ou só não queimadas), pode-se criar uma regra para a situação, com sentido de coringa ou de penalidade;
- Em turmas com muitos estudantes, é interessante que o jogo seja realizado em grupos menores;
- Para evitar que as crianças se dispersem, podem ser criadas alternativas para quem alcançar menos pontos em cada rodada, de modo que ninguém saia do jogo. Por exemplo, anotar os resultados em cada rodada e comparar a contagem dos pontos após o fim de um determinado número de rodadas para se definir o vencedor;
- Em caso de muitas rodadas ou campeonatos, os resultados dos participantes podem ser registrados em gráficos para análise futura;
- É bastante importante que o professor estimule a produção de registros durante o jogo, conforme seus objetivos pedagógicos;
- É interessante estimular a criação de variações do jogo. Por exemplo: após todos jogarem seus grãos, um grão somente é lançado por um jogador previamente escolhido. Se cair para cima a face queimada, os participantes devem comparar as quantidades de grãos queimados de cada um e sai quem tiver menos. Se cair para cima a face não queimada, usa-se o critério de comparar a quantidade de grãos não queimados.

Alguns professores sinalizaram lacunas na sua formação em matemática, revelando, por exemplo, problemas com notação matemática e uso de regras sem compreensão de seus significados. No entanto, como se pode notar pelas observações, a respeito do jogo, apontadas acima, os professores demonstraram segurança e criatividade, jogando com propriedade e sugerindo alternativas de materiais, regras e grau de dificuldade, conforme os fins pedagógicos eram traçados.

A oficina estimulou, nos participantes, o interesse pelo uso de jogos e brincadeiras na educação escolar, como reconhecimento do papel dos jogos na identidade dos povos indígenas. Além disso, motivados pelo "Jogo do milho queimado", alguns professores têm buscado identificar outros jogos tradicionais. Posteriormente àquele momento da oficina, muitos relataram o quão positivas foram as experiências com o jogo em suas respectivas salas de aula, o que nos anima a continuar atuando, trocando experiências e contribuindo para a educação escolar indígena.

Figura 30: Crianças tupinikim brincando com o "Jogo do milho queimado"

Fonte: Acervo pessoal

Considerações finais

A escola como uma instituição social não tem apenas funções pedagógicas, mas precisa considerar pressupostos sociais e campos culturais em seu projeto educacional. Para tanto, é necessária uma autoconfiança e não um estranhamento para que se possa executar um currículo e ações educacionais com efetividade. Se isso não ocorre, é possível observar a falta de engajamento dos professores envolvidos no processo de ensino, o que pode resultar na falha dos rituais escolares (DAMEROW, 1990).

Ao pensarmos sobre as importantes ações educacionais no contexto indígena, precisamos preocupar-nos com o currículo e termos clareza de que não faz sentido copiar e reproduzir o currículo dos não índios. Deve-se ter como foco a elaboração de um currículo que leve em conta as especificidades culturais e sociais dos indígenas, uma vez que elas são bem distintas em questões principais, como língua, crenças e integração com a natureza (SILVA; SAD, 2012).

Embora o inevitável processo de transformação de práticas educacionais possa ser provocado pela proximidade e pelas trocas de significados entre elementos da cultura indígena e da cultura não indígena, precisamos aprender mais uns com os outros nesses momentos conjuntos de construção e reflexão sobre recursos didáticos promotores de uma educação matemática de valor a todos os envolvidos.

Referências

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática:** elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DAMEROW, Peter. Etnomathematik und Curriculumexport – Zu diesem Buch. In: GERDES, P. (Ed.) **Ethnogeometrie:** Kulturalantropologische Beiträge zur Genese und Didaktik der Geometrie. Bad Salzdetfurth: Barbara Franzbecher, 1990.

ELKONIN, Daniil. **Psicologia del juego**. Madrid: Visor Livros, 1978.

GOHN, Maria da Glória. **Educação não formal e o educador social:** atuação no desenvolvimento de projetos sociais. São Paulo: Cortez, 2010.

GOHN, Maria da Glória. Educação não formal, aprendizagens e saberes em processos participativos**. Investigar em Educação** – II ª série, número 1, 2014, p. 35-50.

GRANDO, Beleni Saléte (Org.). **Jogos e culturas indígenas:** possibilidades para a educação intercultural. Cuiabá: EdUFMT, 2010.

LORENZONI, Claudia A. C. de Araujo. **Cestaria Guarani do Espírito Santo numa perspectiva etnomatemática**. 2010. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2010.

LORENZONI, Claudia A. C. de Araujo. A história do cesto é assim: etnomatemática dos Guarani do Espírito Santo. In: Seminário Nacional de História da Matemática, 2009, Belém. **Anais...** Natal: SBHMat, 2009, p. 20. 1 CD-ROM.

LOUREIRO, Klítia; TEAO, Kalna M. **História dos índios do Espírito Santo**. Vitória, patrocínio Lei Rubem Braga, 2010.

MAGALHÃES, Dóris Reis de. **Concepções, crenças e atitudes dos educadores tupinikim frente à matemática.** 2007. Dissertação (Mestrado) – Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2007.

MENDES, Jackeline Rodrigues (Org.). **Arãdu Porã Rape**. MEC/FNDE, SEDU/ES: [200?].

MOURA, Manoel Oriosvaldo. O jogo na Educação Matemática. **Ideias**. São Paulo, n.7, p. 62-67, 1990. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_07_p062-067_c.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2017.

NASCIMENTO, Carolina Picchetti.; ARAÚJO,E.S.; MIGUÉIS,M.R. O conteúdo e a Estrutura da Atividade de Ensino na Educação Infantil: O Papel do Jogo. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo (Org.). **A atividade pedagógica na teoria Histórico-Cultural**. Brasília: Liber livro, 2010, p. 111-134.

OCTÁVIO, Lilia de Souza; ARAÚJO, Elaine Sampaio. A Matemoteca Escolar: Paradigmas do Jogo no Ensino de Matemática. In: ARAÚJO, Elaine Sampaio; MOURA, Manoel Oriosvaldo de. (Org.). **As contribuições da atividade orientadora de ensino para organização do processo de ensino e aprendizagem**. Campinas: Pontes Editores, 2016. p. 45-71. Disponível em: <http://www.labeduc.fe.usp.br/?post_type=labs&p=747>. Acesso em: 06 ago. 2017.

SANTOS, Marli da P. V. G. dos. **A, B, C de Irajá.** Aracruz: PSTG – Fibria, 2017.

SILVA, Circe M. S. da; SAD, Ligia Arantes. The transformation of knowledge through cultural interactions in Brazil: the case of the Tupinikim and the Guarani. In: RENN, Jürgen (ed.). **The globalization of knowledge in History**. Berlin: Max Planck, 2012.

TEAO, Kalna Mareto; LOUREIRO, Klítia. **História dos índios do Espírito Santo**. Vitória: Ed. do Autor, 2009.

O Ensino de Matemática entre o propedêutico e o profissionalizante:

análise do livro Didática da Matemática na década de 1960

Antonio Henrique Pinto
Daniele Gomes Aquino

Introdução

A análise do desenvolvimento do ensino de matemática nos cursos técnicos da Escola Técnica Federal do Espírito Santo (ETFES) na década de 1960 requer um olhar mais amplo, trazendo o contexto da educação profissional nesse período, o qual é caracterizado pela conquista da equivalência legal entre os currículos do ensino secundário e o currículo do ensino técnico-profissional (Lei 4024, 1961). Nessa perspectiva, cabe questionar o que significou essa equivalência em termos de proposição curricular para o ensino da matemática?

Em busca de uma resposta, ampliamos o campo de análise em busca de relações entre a educação profissional e o contexto das políticas educacionais implementadas a partir da segunda metade do século XX. Entre essas ações lançamos nosso olhar para as medidas voltadas para a formação do professor de matemática numa época em que os cursos de licenciatura em matemática eram poucos e localizados apenas nos grandes eixos urbanos. Nessa conjuntura, deparamo-nos com a Coordenação de Aperfeiçoamento e Desenvolvimento de Pessoal do Ensino Secundário (CADES), órgão criado para apoiar o desenvolvimento do ensino secundário. A importância da CADES na formação de professores é salientada por Garnica (2012), pesquisador que aponta para o fato de que esse órgão governamental desempenhou papel tão, ou mais, relevante que as faculdades de filosofia.

Para esse empreendimento, cotejamos o livro *O ensino de matemática na escola secundária*, compêndio didático que, por iniciativa da CADES, alcançou relativa circulação entre os professores das escolas técnicas federais nas décadas de 1960 e 1970. A primeira vista pode parecer sem sentido imaginar que a CADES tenha contribuído para a formação de professores para atender o ensino nas escolas técnico-profissionalizantes. Todavia, se considerarmos a escassez de cursos de licenciatura em matemática no período demarcado, verificaremos que o processo formativo implementado pela CADES abrangeu um escopo de atuação além da preparação de profissionais para o ensino secundário. Com efeito, a demanda por uma melhor formação didático-pedagógica do professor de matemática fazia-se presente tanto no ensino secundário quanto no ensino técnico-profissionalizante.

No caso específico da Escola Técnica Federal do Espírito Santo, a existência de uma vasta materialidade relativa aos documentos da CADES, incluindo o livro supracitado, evidencia a influência desse órgão do Ministério da Educação (MEC) no processo de formação e habilitação dos professores de matemática na ETFES (PINTO, 2006). Nessa época, eram escassos os cursos superiores de licenciatura em matemática no Brasil e, no caso da ETFES, até fins dos anos 1970, a maioria dos professores dessa disciplina vinha de formação nos cursos de engenharia. Dessa forma, esses professores enquadravam-se no escopo dos objetivos da CADES, ou seja, possibilitar uma formação para a melhoria do ensino de nível médio.

Assim sendo, deduzimos que o contexto caracterizado pelo desenvolvimento econômico, técnico e social na década de 1960 passou a influenciar tanto o currículo da escola secundária, como também o da escola profissionalizante de nível médio. Conforme salientamos, não fora sem motivos que esse período foi marcado pela equivalência entre os dois currículos. A equivalência no plano legal proporcionou uma aproximação entre os dois currículos, aspecto explicitado por Lima (1967) ao afirmar a urgente necessidade de se repensar o currículo da escola secundária naquele contexto desenvolvimentista, pois “a continuar esta tendência, não prepararíamos a mão de obra necessária aos serviços técnicos, à indústria e à agricultura” (LIMA, 1967, p. 13).

Impulsionada pelo desenvolvimento econômico da década anterior, o Brasil inicia a década de 1960 com uma demanda educacional crescente, tanto em relação à formação profissional quanto em relação ao ensino ginasial e secundário. Se o ingresso na universidade era a aspiração dos jovens oriundos das famílias mais abastadas economicamente, a qualificação profissional para ingresso no mundo do trabalho constituía-se uma necessidade para os jovens oriundos das famílias de trabalhadores (Souza, 2008). Assim, para atender a essa demanda educacional, um dos obstáculos a ser superado consistia em proporcionar uma formação e qualificação dos professores para a escola de nível médio.

Ao olhar para esse passado, partimos do pressuposto de que, para além de conteúdos, uma proposta didático-pedagógica disciplinar é perpassada pelos objetivos educacionais mais amplos da instituição escolar (CHERVEL, 1990). Além disso, considerando que o livro analisado constitui-se numa memória desse passado, portanto, cotejá-lo em suas entrelinhas e dobras possibilita trazer à luz indícios e evidências sobre acontecimentos que, sujeitos à análise interpretativa (GUINZBURG, 1989; CERTEAU, 1982), permitem compreender o significado dessa obra como uma referência para a didática da matemática no ensino secundário, no contexto considerado.

Aspectos gerais do livro *Didática da Matemática*

A CADES foi criada na década de 1950 como órgão ligado ao Ministério da Educação (MEC) com a finalidade de proporcionar o desenvolvimento do ensino secundário por meio da melhoria da formação didático-pedagógica de seus professores (SOUZA, 2008). Não obstante, nos anos 1970, o aumento de ofertas de cursos de licenciatura nas universidades e a transformação do ensino secundário em ensino de 2º grau (Lei 5.692/1971) proporcionou a extinção da CADES.

Durante as duas décadas de sua atuação, a CADES não apenas proporcionou a formação de professores, mas também incentivou o desenvolvimento de pesquisas educacionais com o fim de proporcionar a elaboração de material pedagógico. Lima (1967) salienta esse processo destacando os encontros pedagógicos e as jornadas de formação que reuniam professores e diretores em seminários e em cursos de aperfeiçoamento, realizados nos diversos estados da federação. Segundo Saviani (2007), a CADES contava com uma equipe numerosa que se dedicava à preparação de materiais para formação de diretores e professores em diversas capitais do Brasil.

Para incentivar a produção de material didático-pedagógico, uma das estratégias de ação da CADES se constituiu na promoção de concursos relativos ao dia do professor, premiando os autores de pesquisas monográficas relevantes para o ensino secundário. Nessa perspectiva, a publicação dessas monografias em livro fazia parte das ações de divulgação dos materiais pedagógicos destinados aos professores do ensino secundário. O livro *A Didática da Matemática no Ensino Secundário* foi a obra vencedora do 3º concurso de monografias realizado pela CADES, de autoria da professora Maria Edmée de Andrade Jacques da Silva, no ano de 1960.

Dessa forma, para análise dessa importante obra, partimos do pressuposto de que, ao receber o aval da CADES, as recomendações didático-pedagógicas propostas no livro foram legitimadas como referência para o currículo de matemática e como metodologia para orientar a prática pedagógica do professor. Esse aspecto é ressaltado logo no prefácio de seu livro, no qual a autora esclarece que a obra tem o intuito de ser útil para estabelecer regras normativas da didática da matemática para o ensino secundário.

Figura 31 – Livro A Didática da Matemática no Ensino Secundário

Fonte: Arquivo do IFES/Campus Vitória-ES

A obra Didática da Matemática está estrutura em capítulos. No primeiro, a autora dedica-se aos aspectos gerais pertinentes ao ensino da matemática na escola secundária, destacando o papel da educação no contexto daquela época. No segundo, a autora apresenta os tópicos do ensino de matemática, destacando a Aritmética, a Álgebra, a Geometria, a Trigonometria, as Funções e o Cálculo infinitesimal. No terceiro, são oferecidas algumas orientações gerais aos professores de matemática, salientando aspectos relevantes para a elaboração do plano de ensino de matemática.

Ao apontar os aspectos gerais sobre o ensino da matemática, a autora discorre sobre os parâmetros legais e as concepções relativas à didática da matemática, entrelaçando questões da educação às questões sociais, econômicas e culturais daquela época. Silva advoga que uma nova sociedade emergia naquele contexto da década de 1960, provocando o surgimento de valores e comportamentos adequados ao mundo urbano-industrial-tecnológico pelo "[...] deslocamento das humanidades para a cultura científica" (SOUZA, 2008, p. 285). Corroborando com a autora, a Congregação do Colégio Pedro II, publica, no Diário Oficial de 22-2-1952, Instruções Metodológicas para o Ensino da Matemática, destacando que a matemática é um objeto de cultura, um instrumento de trabalho e fator de aperfeiçoamento mental.

Sintonizado com esse contexto, a autora do livro *A Didática da Matemática no Ensino Secundário* salienta alguns objetivos para o ensino de matemática: desenvolver no aluno a capacidade de julgamento, o hábito de concisão, a intuição, a agilidade de ação e de raciocínio, a atenção e a presteza para compreender, reter e elaborar, aspectos que também eram destacados pelo National Committee on Mathematical Requeriments (SILVA, 1960, p. 16). Quanto aos objetivos específicos do ensino da matemática, a autora os classifica em três categorias:

1. *Automatismo:*
   a. hábitos – de estudo, de exatidão, de rigor, de precisão, de ordem, de clareza, de correção de linguagem, de concisão, de persistência no trabalho, de asseio, e de verificação de resultados;
   b. habilidades específicas – em medir, comparar medidas, calcular, consultar tábuas e tabelas, organizar e interpretar gráficos, construir tábuas e tabelas, dominar simbologia e a terminologia matemáticas, reconhecer figuras geométricas, associar curvas geométricas a equações algébricas e vice-versa, usar e organizar formulários e etc.
2. *Elementos ideativos*: informações e conhecimentos da Matemática sobre seus conceitos, seus métodos científicos, o desenvolvimento de seus raciocínios, seus postulados e teoremas.
3. *Elementos emotivos*: o gosto pela resolução de problemas a apreciação estética pelas formas geométricas, "a percepção da identidade dos métodos e procedimentos empregados em diferentes ramos, muitas vezes em aparente interrelação (SILVA, 1960, p. 17).

Tais categorias foram elaboradas de modo articulado às finalidades do ensino secundário, as quais estão pautadas no Decreto Lei n. 42.444 de 09 de abril de 1942, que estabelecia:

4. *Formar, em prosseguimento da obra educativa do ensino primário, a personalidade integral dos adolescentes.*
5. *acentuar e elevar, na formação espiritual dos adolescentes, a consciência patriótica e a consciência humanística.*
6. *Dar preparação intelectual geral que possa servir de base a estudos mais elevados de formação especial.*

Para atender tais objetivos e finalidades, enfatiza-se ao professor a importância em adotar uma visão unificadora, evitando cair na tentação de separar o utilitário do acadêmico, o prático do teórico (SILVA, 1960, p.18). Para isso, a autora buscou em Félix Klein a visão de um conhecimento matemático ligado às necessidades do meio social e aos fins da educação, aspectos que variam em cada época e cultura. Desse modo, preocupou-se em apresentar os valores formativos que devem ser levados em conta no ensino da matemática:

> **Valores preparatórios** – importância no quadro geral do saber humano, como resultado da urbanização e industrialização, para uma civilização tecnológica. Base indispensável à aquisição de outros ramos do conhecimento, com aplicações imprescindíveis a outras ciências.
>
> **Valores práticos** – os valores práticos utilitários da matemática se relacionam com o "modus vivendi" de cada um, ou seja, sua posição social, suas leituras preferidas, influenciando na forma de resolver os problemas do cotidiano.
>
> **Valores Gerais** – a matemática auxilia o indivíduo na forma como interpreta o meio social, geográfico e físico, por meio de seus conceitos, seus métodos de investigação, seu simbolismo, seus ideiais de rigor (SILVA, 1960, p. 18-19).

Inserido nas questões gerais da didática, a Silva recomenda ao professor que faça uso de enunciados claros, linguagem precisa, interpretação exata dos símbolos, distinção entre teorema e postulados e exatidão dos dados e dos resultados. Segundo ela, esses são aspectos intrínsecos à matemática e não se fazem presente em nenhuma outra ciência, possibilitando ao homem conciliar o pensamento puro ao domínio da técnica. A autora também fornece algumas orientações que devem ser observadas no momento de selecionar os conteúdos de ensino, a partir de "uma revisão periódica de suas finalidades, de seus objetivos, de seus programas" (SILVA, 1960, p. 22). Desse modo, sugere que:

> a seleção de assuntos deve obedecer aos valores práticos e preparatórios da matemática (...) deve ser coerente com os objetivos da matemática no quadro geral do ensino (...) seja dado relevo as ideias gerais, aos conceitos básicos, aos postulados, aos princípios, omitindo-se nos programas o excesso de minucias e os estudos de casos particulares (...) deve obedecer ao critério genético, isto é, deve ser adequada ao nível mental dos alunos, de modo a haver um primeiro contato com o mundo concreto e só depois, gradativamente uma penetração no domínio lógico-abstrato (SILVA, 1960, p. 22-23).

A partir dessas orientações, discorre sobre como deve ser elaborado o plano de curso, o plano de unidade e o plano de aula. Na elaboração de um plano de curso, compreendido como um roteiro resumido das atividades docentes e discentes desenvolvidas no período letivo, a autora destaca que se deve incluir: a definição dos objetivos do ensino, a metodologia desenvolvida pelo professor, os pontos de contato com outros tópicos da matemática e com outras disciplinas, o modo do uso do livro didático e a previsão de atividades extracurriculares. Além disso, salienta que, da contagem das aulas, deve ser deduzido quinze por cento para possíveis faltas eventuais e imprevistos e que é preciso organizar a matéria a ser ensinada em unidades e subunidades.

Na elaboração do plano de unidade, destaca que ele deve conter objetivos mais específicos, com detalhamento que apresente uma articulação com outras disciplinas bem como com outros ramos da matemática (SILVA, 1960, p. 25-26). Por fim, na elaboração do plano de aula, chama atenção para que se evite "a rotina, as omissões e as repetições involuntárias" (SILVA, 1960, p. 27), organizando atividades discentes que contemplem os objetivos de ensino.

Quanto à metodologia, ressalta a importância da escola reservar uma sala especial para o ensino de matemática que seja equipada com aparelhos e com materiais, de modo a possibilitar a demonstração de algumas propriedades geométricas, do teorema de Pitágoras, da lei angular de Tales, das propriedades da bissetriz do ângulo do vértice dos triângulos isósceles, etc. Exemplificando sua proposta metodológica, a autora recorre ao ensino da geometria espacial, referida como a "geometria a três dimensões". Para Silva, o ensino e a aprendizagem desse conteúdo requerem "grande visualização mental, que nem todo aluno possui, exige o emprego frequente de figuras no quadro e de modelos que auxiliem aqueles de imaginação menos poderosa" (SILVA, 1960, p. 51). Prossegue com essa ideia afirmando que na "intuição espacial" o professor pode utilizar "folhas dobradas para os estudos de diedros e triedros", "pedaços de sabão para obter secção de sólidos geométricos, por cortes" (SILVA, 1960, p. 51). Por fim, para uma melhor organização dessa sala especial destinada ao ensino de matemática, sugere a aquisição de um acervo de livros especializados de matemática que estejam à disposição tanto de professores quanto de alunos.

Nesse sentido, sugere uma lista de bibliografias que poderia ser útil aos professores e alunos, organizados em categorias temáticas. Se o professor quer explorar a "Recreação e Diversão", sugere os seguintes títulos: *Matemática divertida e curiosa, História e fantasias da Matemática, Diabruras de Matemática e O Escândalo da Geometria*, quase todos do professor Júlio César de Mello e Souza. Para a temática "Aritmética" recomenda: *Lições da Aritmética,* de Euclides Roxo) e *Exercícios de Aritmética*, de Cécil Thiré. Quanto à "História da Matemática", sugere os títulos: *A concise History of Mathematics,* do autor Dirk J. Struick e

História da Matemática, de F. Vasconcelos. Na seção de "Geometria", à exceção de *Geometria Superior,* da Editora F.T.D., poucas são as obras de autores brasileiros. Em todas as categorias é notória a predominância de títulos em língua francesa, aspecto que evidencia uma influência do pensamento francês no ensino secundário brasileiro.

Preocupada em apresentar de modo sintético o que propõe para o ensino de matemática, Silva nomeia os eixos temáticos da matemática, dividindo-os em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria, Funções e Cálculo infinitesimal. Embora aponte essa divisão em eixos temáticos, salienta a necessidade de unificar o ensino de matemática, pois ele encontra-se artificialmente subdividido em diferentes ramos. Para isso, ressalta a perspectiva de ensino de Félix Klein, cuja proposta reivindica para o ensino de matemática na escola secundária um eixo unificador a partir da noção e do conceito de função como elemento unificador do ensino. Assim, a autora entrelaça o ensino de função aos conteúdos relacionados à trigonometria, geometria, cálculo infinitesimal e geometria analítica, vinculando-o, desse modo, a "todas as partes da matemática", evidenciando uma visão unificadora desses eixos.

Silva mostra-se preocupada em esclarecer ao professor que os objetivos de ensino da matemática devem ser definidos considerando-se o meio social ao qual a educação está inserida, enfatizando a subordinação dos meios aos fins da educação. Para isso, apoia-se também em Felix Klein para afirmar que as finalidades educacionais variam com as diretrizes culturais de cada época.

Cotejando o texto do livro, a autora se mostra contrária ao ensino fragmentado da matemática em aritmética, em álgebra e em geometria. Nessa perspectiva, observa-se que ela busca elementos que unifiquem esses campos da matemática, estabelecendo uma correlação cada vez mais estreita entre essas partes, pois esse movimento a torna mais significativa. Também aponta uma concepção interdisciplinar ao se posicionar a favor de vincular a aritmética a outras disciplinas, como a geografia.

Aspectos didáticos relativos ao ensino da aritmética

Silva enaltece o tema da aritmética afirmando que esse assunto constitui-se na "base onde se deverá apoiar a álgebra e está intimamente relacionada com a geometria" (SILVA, 1960, p. 109). A fim de fortalecer sua ideia, busca a afirmação de Gaus quando este se referiu à aritmética como a "Rainha da matemática" (Idem, 1960, p. 110).

Desse modo, orienta ao professor que o ensino da aritmética na escola secundária deve propor conteúdos relacionados ao cálculo abreviado, números relativos, razão e proporções, primeiras noções de trigonometria, potências e raízes, cálculo aritmético aproximado e logaritmos. A partir desses conteúdos, a autora destaca a importância das aplicações práticas da aritmética, propiciada por atividades que envolvam a porcentagem, o cálculo de juros, etc.

Ao ressaltar o lado prático e intuitivo do ensino, a autora refere-se à aritmética como sendo a "parte da matemática mais familiar ao aluno" (SILVA, 1960, p. 109), tendo seu primeiro contato no curso primário, no qual a matéria está estruturada, retornando ao ensino secundário de forma "mais complicada" (SILVA, 1960, p. 109), porém sem perder seus processos fundamentais. No ensino secundário, é exigida a consolidação e ampliação dos conceitos aritméticos, requerendo do aluno maior sistematização das propriedades das operações, pois seu domínio constitui-se no "ramo da matemática que apresenta maiores valores práticos diretos, relativamente à vida cotidiana" (SILVA, 1960, p. 109).

Mesmo o aluno tendo um primeiro contato com a aritmética na escola primária, Silva mostra preocupação quanto ao cumprimento de seus objetivos, afirmando que eles não vêm sendo plenamente atingindo no que tange à resolução de problemas de álgebra e de geometria. Nesse sentido, apresenta os tópicos da matéria com orientações com relação ao processo de ensino, bem como sugerindo a sequência a partir da qual eles serão ensinados.

Sobre o ensino de "cálculos aritméticos abreviados", a autora diz possuir um alto valor motivador, orientando ao professor que o ensino deve propiciar ao aluno o domínio de técnicas de cálculo que facilitarão os procedimentos operacionais do cálculo (SILVA, 1960, p. 110). Contudo, embora saliente a necessidade do cálculo abreviado, ressalva que esse processo deve ser ensinado em época oportuna, após os alunos apresentarem o domínio cabal do conteúdo. Ressalta, também, a importância de ensinar aos alunos a decomposição dos números, com o intuito de facilitar as operações, além de os alunos não precisarem "armar a conta" (SILVA, 1960, p. 110).

Com relação aos Números Relativos, a autora diz que a escolarização da escola primária traz a experiência dos números positivos e do zero, sugerindo introduzir a nova noção de números negativos, com exemplo de escala de temperatura, para desenvolver a "ideia de grandeza orientada em dois sentidos oposto" (SILVA, 1960, p. 111), tendo como referência o zero. Orienta ao professor esclarecer ao aluno a localização dos números relativos pelos pontos de uma reta e que os "sinais (+) e (-) anteposto, significam uma condição qualitativa, de sentido, dado à grandeza" (SILVA, 1960, p. 112). Sugere ainda o uso da reta como facilitador para a compreensão da soma dos números relativos, orientando que as outras operações só sejam apresentadas aos alunos após o aprendizado da soma, sendo básica em relação as demais. No ensino da subtração, indica que o professor deverá ajudar o aluno a concluir a regra, após tentativas de "dados o minuendo e o subtraendo, devemos encontrar o número que somado ao segundo dá o primeiro" (SILVA, 1960, p. 113).

Ao ensinar a multiplicação, a autora diz ser útil levar os alunos à generalização. Em seguida, sugere ao professor apresentar a potenciação com expoente inteiro e positivo e, por fim, apresentar aos alunos a operação de divisão. Na concepção defendida no livro, o aluno deverá "exercitar abundantemente as regras visando a memorização" (SILVA, 1960, p. 114).

Para o conteúdo "razão e proporções", a Silva inicia o tópico destacando que a ideia de proporção deverá estar ligada à fração ordinária e à divisão, sendo já conhecidos dos alunos esses conceitos. Salienta que o professor deve mostrar que "razão" é a comparação entre duas grandezas homogêneas e, para o ensino de proporção, sugere ao professor apresentá-la como a igualdade entre duas razões. Destaca que, para demonstrar as propriedades das proporções, o professor faça uso das propriedades das frações e dos princípios relativos à igualdade. Aponta para a aplicação em problemas para tornar os conceitos mais claros, intuitivos e práticos relacionados ao cotidiano do estudante e instrui que se mostre que o cálculo da quarta proporcional é essencial para a resolução da equação linear $a/b=c/x$, equivalente à $ax=bc$, e, portanto, $x=bc/a$.

Como exemplo prático orienta o professor a ilustrar com o uso de figuras semelhantes, mapas e desenhos em escala. Para a autora, problemas que abordam a regra de três simples e composta constituem a mais frequente das aplicações da teoria. Em seguida, a autora sugere a apresentação da porcentagem como sendo uma razão de denominador igual a cem. Ao abordar o tema juros, enfatiza a necessidade de mostrá-lo na vida prática e no cotidiano (SILVA, 1960, p. 114), apresentando-o como problemas que envolva a regra de três. Indica ao professor que faça a ressalva aos alunos esclarecendo que nos estabelecimentos bancários a forma operacional dos juros é o composto.

Curioso verificar que, ao salientar a aplicação da aritmética, a autora apresenta as primeiras noções de trigonometria, relacionando--as com o estudo de proporcionalidade dos lados de triângulos retângulos semelhantes, dando uma nova perspectiva às noções de razão e proporção. Sobre o tema "potenciação e radiciação", sugere que o ensino desses conteúdos comece pelos expoentes inteiros e positivos, com exemplos para "obrigar os alunos a deduzirem as regras" (SILVA, 1960, p. 117), ou seja, as propriedades de potência. Porém, destaca que só é possível ensinar expoente fracionário após os alunos realizarem o estudo da radiciação.

Figura 32 – Orientação para o ensino da radiciação

$$\text{Se } a^2 = b, \text{ então } a = \sqrt{b}$$

$$\text{Se } a^3 = b, \text{ então } a = \sqrt[3]{b}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{Se } a^n = b, \text{ então } a = \sqrt[n]{b}$$

Fonte: SILVA, 1960, p. 118

Sugerindo que se ressalte a substituição de *a* e *b* pelos números, indica ao professor que faça uso de exemplos geométricos para abordar grandezas incomensuráveis. Dessa maneira, entende que esse tópico torna-se o conteúdo que possibilitará ao professor abordar o ensino do conjunto dos números reais. Na opinião de Silva, esse é o momento ideal para que o professor realize a classificação geral do campo numérico, trazendo como sugestão o esquema.

Figura 33 – Esquema de classificação do campo numérico

$$\text{Números reais} \begin{cases} \text{Racionais} \begin{cases} \text{Inteiros} \\ \text{Fracionários} \end{cases} \\ \text{Irracionais} \end{cases}$$

Fonte: SILVA, 1960, p. 119

Silva recomenda que os números racionais e irracionais sejam mostrados como o conjunto dos números reais, pois exprimem comprimentos e grandezas existentes. Salienta, também, o uso de problemas geométricos que envolvam a ideia de incomensurabilidade, apresentando como exemplo a diagonal do quadrado de lado igual 1. Nesse sentido, buscando na teoria de Dedekind o desenvolvimento desse campo numérico, a autora pede que esse conceito seja ensinado de forma intuitiva e acessível aos alunos, a partir do seguinte esquema:

Figura 34 – Esquema de classificação do campo numérico

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

Fonte: SILVA, 1960, p. 119

Ao abordar o cálculo aritmético aproximado, a autora entende que o aluno deve ter compreensão do grau de precisão dos resultados de seus cálculos, não conseguindo esse entendimento apenas pelo ensino formal. O aluno deve entender que toda medição, mesmo efetuada com muita precisão, não é rigorosamente exata. Nesse aspecto, sugere que os professores façam uma conexão com a disciplina de Física e de Química.

O tópico de logaritmos é iniciado com uma citação de E.R. Davis, quando este afirma que “os logaritmos, descobertos por Neper, cuja primeira tábua foi publicada por Briggs” (SILVA, 1960, p. 124), constituem um dentre os quatro grandes pontos do desenvolvimento do cálculo numérico. Para o ensino desse conteúdo. Silva sugere que seja feito antes uma revisão sobre a potenciação.

Cabe refletir que, já naquela época, a autora destacava a importância de relacionar a progressão aritmética e geométrica ao estudo das funções. Evidencia que o sistema de logaritmo de base 10 é um dos mais divulgados e que o “sistema neperiano, de base *e*, é o que mais se adapta às operações do cálculo infinitesimal” (SILVA, 1960, p. 125). Recomendando ainda o uso das tábuas, para que os exercícios sejam repetidos e se “obtenha automatismo” (SILVA, 1960, p. 125).

Aspectos didáticos relacionados ao ensino da geometria

Ao discorrer sobre o ensino de geometria na escola secundária, a autora apropria-se de algumas das ideias do alemão Félix Klein, importante matemático e professor, que influenciou o ensino dessa disciplina em diversos países, no final do século XIX e primeiras décadas do século XX, dentre as quais destacam-se a recomendação para unificar o ensino da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, criando a disciplina de Matemática. Nesse ínterim, Silva sugere, baseada no citado teórico alemão, que o ensino de matemática seja estruturado a partir da noção de função, eixo da matemática que articula o conhecimento algébrico, trigonométrico, geométrico, cálculo infinitesimal e geometria analítica (SILVA, 1960, p. 105 e 106). Também recorre a Félix Klein para criticar a "sobrecarga de tradição" presente no ensino da geometria (SILVA, 1960, p. 144), aspecto que caracterizou sua abordagem centrada na axiomática, tendo como base a obra *Os Elementos*, de Euclides. Também segundo a autora, essa tradição teve início no período da Renascença, levando ao abandono de outras formas de ensinar a geometria, por exemplo, o uso das construções com régua e compasso.

Aponta, ainda, quatro aspectos que deveriam ser observadas no ensino da geometria. O primeiro, de caráter prático-intuitivo, visando proporcionar ao estudante um primeiro contato com o concreto, utilizando figuras geométricas para visualização, uso da régua, do compasso, etc. O segundo, quanto à linguagem matemática, salienta a preocupação com a álgebra e como esta deve se relacionar às demonstrações. O terceiro diz respeito à articulação da geometria com outras disciplinas, à maior aplicação da geometria, à apresentação da matéria em unidades de ensino e a encorajar os alunos ao raciocínio, evitando memorizações. Por fim, relacionado ao desenvolvimento do aluno, deve-se estimular o espírito crítico do estudante, observando suas diferenças individuais.

Segundo a autora, esses aspectos deveriam ser considerados também nos livros didáticos, usando uma linguagem mais simples, um maior cuidado em apresentar figuras e ilustrações, mais aplicações práticas, problemas sobre construções de figuras, fórmulas destacadas, proposições de propriedade ou teoremas a serem demonstrados, matéria e exercícios envolvendo a álgebra, a aritmética e a trigonometria e notas históricas.

Nesse sentido, a autora confere um destaque ao que denomina de "geometria intuitiva", compreendida como uma percepção sensorial do espaço que possibilita formar uma base física, concreta e experimental para se desenvolver a essência da matemática, ou seja, a abstração. Contudo, salienta que a intuição constitui-se na "força motriz" da criação da matemática. Em sua opinião, a geometria dedutiva necessita de conhecimentos prévios dos conceitos fundamentais, como as noções primitivas, os postulados e definições, os teoremas, elementos que são primordiais para o processo dedutivo.

Coerente com sua proposta didática, a autora tem uma postura contra a repetição e a memorização de teoremas, pois, em sua opinião, faz-se necessário criar significado para o conhecimento, raciocinar com hipóteses e argumentar, etapas inerentes ao processo de demonstração matemática. Dessa maneira, fica evidenciada a importância da demonstração como processo didático-pedagógico que conduz ao aprendizado da geometria. Em relação às proposições, descreve vários pontos a serem observados pelo professor, tais como, realizar as demonstrações em uma só etapa e evitar a demonstração de proposições muito evidentes, "porque os alunos julgam qualquer esforço nesse sentido desnecessário e mesmo ridículo" (SILVA, 1960, p. 153), sendo mais adequado, nesse caso, solicitar a justificativa em vez da demonstração.

Como recomendação didática para as construções das figuras geométricas com régua e compasso, a autora organiza o ensino em quatro etapas: análise dos elementos dados; construção de figuras utilizando os materiais; demonstração de que a figura construída satisfaça as condições requeridas pelo enunciado; discussão das possibilidades de construção (SILVA, 1960, p. 154). Quanto às demonstrações de teoremas, recomenda não apresentar uma longa cadeia de enunciados, mas sim dar "ênfase aos mais importantes elos da cadeia", deixando como simples citação aqueles de "menos importância" (SILVA, 1960, p. 156).

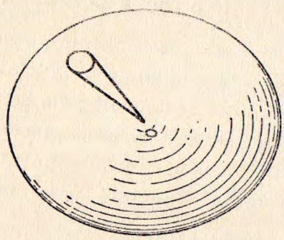
Ao discorrer sobre a melhor forma de trabalhar o tema "lugar geométrico", salienta que este compreende um conceito relevante da geometria analítica e, dessa maneira, recomenda que sejam realizadas visualizações que facilitem a compreensão das definições de mediatriz e bissetriz de um ângulo, por exemplo. Para o ensino do conceito de semelhança, propõe que se limite ao conceito de razão e proporção.

Curioso observar a referência que a autora faz ao tema "geometrias não euclidianas", pois, em geral, esse conteúdo não se constituía em assunto da escola secundária. Ao tratar desse tema, inicialmente discorre sobre os postulados da geometria Euclidiana para, em seguida, abordar as geometrias não Euclidianas, como recurso para resolver o problema conceitual que envolve o postulado das paralelas, contido nos Elementos, de Euclides. Novamente recorre à Felix Klein, quando este propõe que o ensino aborde outras geometrias, como a "geometria hiperbólica", a "geometria parabólica" e a "geometria elíptica", respectivamente dos matemáticos Lobatchewsky, Euclides e Riemmann (SILVA, 1960, p. 162).

Em sua proposta didática, Silva salienta que, diante do "império" da geometria euclidiana, a geometria no espaço tridimensional tinha uma posição secundária, pois "sua finalidade era o desenvolvimento do pensamento lógico e não o aperfeiçoamento da percepção visual" (SILVA, 1960, p. 163). Destaca, contudo, que, naquele contexto de avanço científico e tecnológico da década de 60, isso estava começando a mudar (SILVA, 1960, p. 163). Exemplifica com a proposta didática dos professores do Colégio Pedro II, com relação à dedução da fórmula do volume da esfera, conforme mostrado a seguir:

Figura 35 – Dedução da fórmula do volume da esfera

Considera-se uma parte da esfera limitada por uma superfície cônica de revolução, cujo vértice se situa no centro da esfera de maneira que a porção da superfície esférica por ela determinada tenha uma área elementar unitária, s =1.



A área total da superfície esférica é $4 \pi r^2$, (sendo r o raio da esfera) portanto a superfície total contém a superfície s unitária um número de vêzes igual a $4 \pi r^2$.

Tomando essa porção da esfera como um cone, seu volume será : $v = \frac{sr}{3}$,

e como s = 1, temos : $v = \frac{r}{3}$ (em unidades cúbicas) e, assim, o volume V da esfera será evidentemente ......

$$V = 4 \pi r^2 v;$$

Logo,

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Fonte: SILVA, 1960, p. 166.

Observa-se, portanto, que há uma defesa pela didática que valoriza a intuição, a visualização e, quando possível, o uso de recursos didáticos manipulativos que leve o estudante a construir seu conhecimento, tendo como ponto de partida o pensamento concreto e indo em direção ao pensamento abstrato. Em sua opinião, as demonstrações devem levar em conta métodos para facilitar a aprendizagem, aspecto que representa uma grande economia de tempo no ensino. Nesse sentido, a autora faz uma crítica aos professores que valorizam exageradamente o formalismo simbólico no ensino da geometria, salientando que:

> A esses diremos que o tempo urge, o ano escolar se escoa celeremente, e o ensino de todos os teoremas (como se isso fosse possível) requer o sacrifício de atividades mais importantes e muito mais proveitosas, como, por exemplo, a resolução de numerosos problemas, a dedução original de proposições, a confecção de modelos, as discussões (SILVA, 1960, p. 166).

Considerações finais

Analisamos alguns aspectos do livro "Didática da matemática" com o intuito de verificar as contribuições desta obra para o desenvolvimento do ensino de matemática na ETFES, partindo do pressuposto que naquela época ocorreu uma imbricação entre o ensino técnico-profissionalizante e o ensino secundário, evidenciada na materialidade de objetos pedagógicos produzida pela CADES. Como mostrado, tanto o ensino secundário quanto o ensino profissionalizante careciam de uma melhor formação didático-pedagógica de seus professores. Assim, as ações formativas desenvolvidas pela CADES para o ensino secundário não se limitou exclusivamente a escola secundária.

Com efeito, salientamos que o contexto social da década de 1960 exigiu do ensino de matemática um deslocamento curricular no sentido de atender ao desenvolvimento técnico-científico, processo que se fez presente tanto na escola destinada à formação profissional quanto na escola secundária, sendo essa última voltada para a continuidade da escolarização até o ensino superior. Em comum, ambas as trajetórias curriculares requeriam um aprofundamento dos conteúdos matemáticos, aspecto que requeria do professor uma formação didático-pedagógica aliada ao domínio do conteúdo e à visão abrangente do significado e do papel da matemática para o desenvolvimento técnico do estudante.

A análise aqui apresentada leva-nos a constatação da necessidade de olhar a matemática para o ensino profissionalizante a partir de uma perspectiva mais ampla, que nos permita compreender seu domínio epistemológico intrínseco à práxis humana, presente na relação teoria-prática e sintetizada nos termos do binômio fazer-compreender.

Nesse sentido, ao estabelecermos uma relação entre o ensino de matemática para a escola secundária e para a escola técnico-profissional, procuramos evidenciar que a excessiva valorização da racionalidade matemática, separando-a de sua aplicabilidade na resolução de problemas e do uso na tecnologia como elemento inerente ao ensino técnico-profissionalizante torna o desenvolvimento desse ensino um componente acrítico e não emancipatório, desprezando o saber experiencial oriundo da atividade do trabalho, da técnica e da ciência, elementos oriundos da atividade humana.

Por fim, cabe salientar que na década de 1960 o ensino secundário correspondia ao nível médio da educação, posterior ao ensino primário, compreendendo duas etapas consecutivas, sendo a primeira relativa ao ensino ginasial e a segunda ao ensino colegial. O ensino técnico-profissionalizante correspondia à etapa do ensino colegial, sendo este organizado em clássico e científico.

Referências

BRASIL. **Lei n. 4.024, de 20 de dezembro de 1961.**Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, 1961.

______. **Lei n. 5.692, de 11 de agosto de 1971**. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2º graus, e dá outras providências. Brasília, 1971.

CERTEAU, M de. **A escrita da história**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1982.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Revista Teoria e Educação**, n. 2, 1990. Porto Alegre: UFRGS, 1990.

GARNICA, A. V. M.; SOUZA, L. A. de. **Elementos de História da Educação Matemática**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012. 384 p.

GUINZBURG, C. **Mitos, emblemas e sinais**: morfologia e história. São Paulo: Companhia das letras, 1989.

LIMA, Lauro de O. **A escola secundária moderna**. Rio de janeiro: Fundo de Cultura, 1967.

PINTO, A. H. **Educação matemática e formação para o trabalho**: práticas escolares na Escola Técnica de Vitória – 1942 a 1990. Tese

(Doutorado). Faculdade de Educação / Universidade Estadual de campinas. Campinas-SP: 2006.

SAVIANI, D. **História das Ideias Pedagógicas no Brasil**. Campinas-SP: Autores associados, 2007.

SILVA, M. E. A. J. da. **A Didática da Matemática no Ensino Secundário**. MEC/CADES, 1960.

SOUZA, R. F. de. **História da organização do trabalho escolar e do currículo no século XX:** ensino primário e secundário no Brasil. São Paulo: Cortez, 2008.

O movimento Enconam e o protagonismo dos professores de matemática das escolas técnicas federais

Antonio Henrique Pinto
Marina Gomes dos Santos

Introdução

A matemática em sua relação com o desenvolvimento técnico-científico e a formação para o trabalho constituiu-se como uma temática fundamental para a organização curricular das antigas Escolas Técnicas Federais e dos Centros Federais de Educação Tecnológica. Atualmente denominadas de Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, essas instituições formam a Rede Federal de Educação Tecnológica. A criação dessa rede de escolas data de 1909, quando foram formadas as antigas escolas de aprendizes e artífices destinadas aos adolescentes e jovens das camadas populares, visando a uma formação para o trabalho. Ao longo da segunda metade do século XX, especialmente a partir da década de setenta, essas escolas passaram a ser reconhecidas pela qualidade do ensino nas áreas de física e matemática e, por serem públicas e gratuitas, logo atraíram os adolescentes e jovens de segmentos sociais mais elitizados.

Nesse contexto, seu currículo já não estava restrito à preparação profissional, mas também incluía uma sólida preparação para o ingresso na Universidade (PINTO, 2006). Na década de 1980 essa descaracterização incomodava muitos professores, pois percebiam que a função de formar para o trabalho havia se tornado secundária. Considerando, portanto os novos rumos e movidos pelos ares democráticos desse período, professores de matemática de diversas Instituições Federais de Ensino dos diferentes estados da Federação começaram a organizar encontros anuais com o intuito de debater e elaborar propostas para a melhoria do ensino de matemática. Desse modo, promoveu-se a troca de experiências e a reflexão sobre questões teóricas e metodológicas pertinentes às especificidades do ensino de matemática na escola profissionalizante.

Essas reuniões anuais, organizadas em formato de seminários, denominavam-se Encontro Nacional de Professores de Matemática das Escolas Técnicas Federais e Cefet's, também conhecidos por Enconams. Nos registros a que tivemos acesso foi possível enumerar treze encontros, os quais fornecem ricos indícios sobre a relação entre o ensino de matemática e formação técnico-profissional.

Conforme salientam os historiadores da educação, o Brasil possui um histórico caracterizado pela dualidade entre uma formação para o trabalho, desvalorizada em virtude do longo período escravocrata, e uma formação bacharelesca, considerada melhor que a primeira. Analisar essa questão, a partir da construção do currículo de matemática na educação profissional constitui o objetivo deste trabalho. Para tanto, buscamos registros nos arquivos escolares do Instituto Federal de Educação Tecnológica do Espírito Santo, no período entre 1980 e 1990, contexto de mudanças e rupturas nas práticas curriculares do ensino de matemática estabelecidas no interior dessa instituição. As fontes constituíram-se em "fermento para a história" (LE GOFF, 2003), trazendo vestígios das concepções e das práticas pedagógicas que possibilitaram indiciar as concepções de educação matemática, de homem e de sociedade existentes naquele ambiente (GINZBURG, 1989). Nelas encontramos as memórias de professores que, organizados coletivamente em seminários, buscavam a transformação do ensino de matemática nas Escolas Técnicas da Rede Federal, na perspectiva de integrar, nos cursos técnicos profissionalizantes dessas instituições, as dimensões teóricas e práticas dessa ciência.

O caminho para as mudanças foi a elaboração, pelos próprios professores, de um livro texto específico de matemática para as Escolas Técnicas Federais. Fruto daquele contexto democrático, esse processo seria construído coletivamente e com a contribuição dos professores das áreas técnicas, pois estes eram os que faziam uso da matemática nas aplicações em laboratórios e em oficinas. As evidências apontam para algo mais significativo almejado pelos professores, trata-se do objetivo de rompimento com a concepção dualista presente no binômio teoria-prática, tornando o ensino de matemática nas Escolas Técnicas Federais uma expressão da historicidade do conhecimento matemático na vida dos homens e aplicado ao seu contexto e dimensão ontológica presente na singularidade do trabalho. Por fim, constatamos que esse movimento estava imbuído de uma mudança curricular compreendida a partir de um deslocamento epistemológico que invertia a perspectiva da racionalidade técnica hegemônica construída ao longo do século XX.

A matemática e o contexto histórico social

A história da matemática relatada por diversos historiadores e pesquisadores mostra-nos que o conhecimento matemático surgiu nos primórdios da humanidade, a partir de contextos derivados da relação do homem com a natureza (MIORIM, 1998; D'AMBRÒSIO, 1996; MIGUEL e BRITO, 1996;), visando a resolução de problemas. Também mostra que, já na antiguidade, a visão de uma matemática aplicada ao cotidiano das pessoas começou a ser questionada, sobretudo a partir de Platão (c. 427-347 a.C.) e Euclides.

Neste trabalho, apresentamos essa discussão relativa à matemática e ao seu ensino, mostrando que na atualidade existe o mesmo dilema conceitual do passado, derivado do conflito entre as concepções prático-utilitárias e as concepções idealistas (EVES, 1995; MIORIM, 1998). Com efeito, o acelerado desenvolvimento da ciência no século XIX e XX colocou ao homem a necessidade da escolarização visando à formação do cidadão e seu preparo para o mundo do trabalho. Nesse contexto, a matemática passou a ser considerada um importante conhecimento, sendo identificada como requisito indispensável ao preparo profissional para o desempenho de atividades técnico-profissionais (MIORIM, 1998). Portanto, parece consensual aceitar o lugar de destaque reservado à matemática no currículo escolar do ensino profissionalizante. Entretanto, o mesmo não pode ser dito em relação às concepções de conhecimento matemático dos professores de matemática nos currículos das instituições de ensino profissionalizante.

Nesse sentido, este trabalho tem como pano de fundo o ensino técnico-profissional, trazendo à cena o contexto da década de 1980, uma época marcada pelo renascimento da Sociedade Brasileira de Educação Matemática-SBEM, a qual resultou dos democráticos debates e reflexões sobre o ensino da matemática no Brasil, iniciados desde a década de 1950. Dessa forma, contribui com a compreensão sobre como as concepções de matemática dos professores tencionam e influenciam as práticas pedagógicas. Apresenta também uma abordagem histórica construída a partir dos indícios do passado de alguns professores de matemática das Escolas

Técnicas Federais e Centros Federais de Educação Tecnológica. Com isso, expõe, mais especificamente, uma análise das concepções de matemática dos professores das escolas técnicas federais, questão que aqui é problematizada a partir da singular experiência profissional de alguns que participaram do projeto visando à elaboração do livro didático de matemática para as escolas técnicas federais.

A incursão nesse passado foi possibilitada pelo acesso às memórias dos Encontros Nacionais de Professores de Matemática das Escolas Técnicas Federais – Enconam's. Foram analisadas atas de reuniões da comissão organizadora, anais em que sistematizaram o resultado oficial dos encontros, as apostilas e os fascículos dos livros elaborados pelo grupo de professores. Esses registros encontram-se nos arquivos de memória de uma das instituições pertencentes à Rede Federal de Educação Tecnológica. Visando à complementação das fontes escritas (MEIHY, 2000), foram recolhidos depoimentos orais de professores que participaram dos Enconam's. Nessa perspectiva, o cotejamento dessas memórias resultou na interpretação histórica materializada no relato aqui apresentado, possibilitando compreender as concepções de matemática dos professores que lecionam essa disciplina nos cursos técnico-profissionalizante.

Os Enconam's e a busca por um ensino de matemática mais prático

Os atuais Institutos Federais de Educação Tecnológica são herdeiros das Escolas Técnicas Federais e dos Centros Federais de Educação Tecnológica, instituições de ensino técnico-profissionalizante pertencentes à Rede Federal de Educação Tecnológica, processo que teve início em 1909, quando da criação das antigas Escolas de Aprendizes e Artífices, que eram escolas destinadas aos adolescentes e jovens das camadas populares, visando a proporcionar-lhes uma formação para o trabalho.

Ao longo da segunda metade do século XX, especialmente a partir da década de setenta, essas escolas passaram a ser reconhecidas pela qualidade do ensino nas áreas de Física e Matemática e, por serem públicas e gratuitas, logo atraíram adolescentes e jovens de segmentos sociais mais elitizados. Nesse contexto, seu currículo já não estava restrito à preparação profissional, mas também incluía uma sólida preparação para o ingresso na Universidade (D'AVILA, 1997; PINTO, 2006).

Na década de 1980 essa situação passou a incomodar a muitos professores de matemática que lecionavam nessas escolas, pois percebiam que a finalidade dessas instituições fora descaracterizada, tornando-se secundária a função institucional de formação técnico-profissional. Assim, movidos pelos ares democráticos desse período da história brasileira, professores de matemática das diversas Instituições Federais de Ensino e pertencentes à diferentes Estados da Federação começaram a organizar encontros anuais com o intuito de refletir, debater e elaborar propostas visando ao aperfeiçoamento profissional e à melhoria do ensino de matemática nessas escolas. Essa reunião anual, organizada em formato de seminário, foi denominada de Encontro Nacional de Professores de Matemática das Escolas Técnicas Federais e Cefet's, também conhecidos por Enconam. A tônica de todos os treze encontros realizados entre 1980 e 1994 girou em torno da perspectiva de tornar o ensino de matemática mais ligado ao contexto aplicativo dos cursos técnicos-profissionalizantes, a partir da troca de experiências e da reflexão sobre questões teórico-metodológicas pertinentes ao ensino de matemática em suas especificidades relacionadas ao ensino profissional.

Nesse sentido, chamam atenção os encontros realizados de 1981 (II ENCONAM) até 1985 (IV ENCONAM), pois trazem discussões e reflexões relativas à necessidade de elaboração de um livro didático específico para o ensino de matemática no ensino médio profissionalizante, aspecto central que possibilitou compreender as concepções de matemática dos professores. Para uma visão mais ampla desses encontros faz-se necessário uma incursão em alguns deles.

O I Enconam ocorreu em 1980, na cidade de Curitiba, no Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná. Esse encontro, por ser o primeiro, serviu para que os professores percebessem a identidade de seu trabalho docente por meio da troca de experiências profissionais. Havia duas necessidades em relação ao ensino de matemática que se manifestavam na opinião geral do grupo ali reunido: dar uma unidade ao trabalho docente e fundamentá-lo a partir do princípio de que o ensino da matemática nas escolas técnicas não deve ser igual ao das escolas não profissionalizantes. Os debates e reflexões em torno dessas duas questões fizeram que todos percebessem seus desencontros e diferenças, relacionados, em geral, às práticas pedagógicas, aos programas de ensino dos cursos técnicos, à carga horária da disciplina e à abordagem metodológica de ensino.

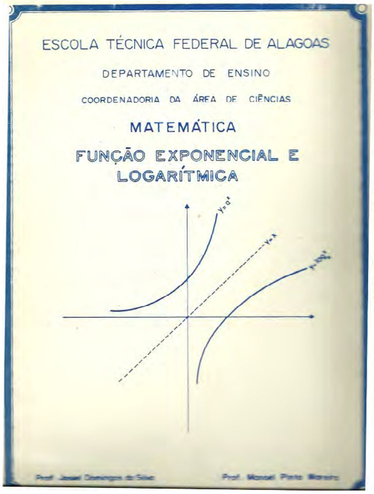
Em 1981, na cidade de Fortaleza, patrocinado pela Escola Técnica Federal do Ceará, aconteceu o II Enconam. Alguns participantes, motivados pelos desencontros do ano anterior, sugeriram propostas visando à mudança na metodologia do ensino da matemática nas escolas técnicas. O argumento principal era que os alunos egressos dessas instituições não apresentavam uma formação profissional de qualidade no que diz respeito aos conhecimentos matemáticos necessários à prática profissional. A constatação geral foi que o ensino ministrado nas escolas técnicas obedecia à concepção clássico-formal, característica da matemática das escolas secundárias.

Tal reflexão sensibilizou os professores que, ao final do encontro, aprovaram a proposta de elaboração de um livro-texto de matemática que seria específico para o ensino de matemática nas escolas técnicas e instituições congêneres. Para isso, foi constituída uma Comissão Provisória, a qual, organizada em grupos por estado e região, selecionou temáticas e conteúdos de ensino de matemática. Aos grupos ficou a incumbência da elaboração do texto didático relativo a um assunto ou conteúdo de ensino do currículo de matemática das escolas técnicas federais. O ajuntamento da produção de cada grupo resultaria naquilo que todos desejavam, a saber, a elaboração de um livro de matemática específico para o ensino de matemática nas escolas técnicas. Ficou acordado que cada grupo trabalharia no decorrer do ano de 1981 e a produção de cada um seria apresentada no encontro anual seguinte, que se realizaria em Belo Horizonte, em 1982.

No III Enconam, realizado no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (Cefet-MG), os grupos que obtiveram sucesso na realização da tarefa apresentaram o resultado do trabalho. Entre esses estava o trabalho elaborado pelo grupo de professores da Escola Técnica Federal de Alagoas que havia ficado responsável pelo ensino das Funções Exponencial e Logarítmica.

Ao final desse encontro, os profissionais aprovaram a formação de uma nova Comissão que trabalharia na revisão e na sistematização dos trabalhos produzidos pelos grupos. Essa comissão foi liderada pela equipe de professores de matemática do Cefet-MG, sob coordenação do professor João Bosco Laudares. Entretanto, uma questão foi levantada por um dos membros da comissão: dada a diversidade de cursos técnicos e o quantitativo de professores de matemática das escolas técnicas em todo o Brasil, como se poderia ter a certeza de que aquela produção ali reunida realmente atenderia ao ensino de matemática requerido na formação profissional?

Figura 36 – Capa da apostila de Função Exponencial e Logarítmica



APRESENTAÇÃO

Este documento se propõe a atender ao compromisso assumido pelos professores desta Escola, participantes do II Encontro de Matemática das Escolas Técnicas Federais, realizado em Fortaleza, no ano de 1981.

Coube-nos a tarefa de contribuir na elaboração de um livro-texto adequado ao ensino profissionalizante, tendo nossa escolha recaído sobre Função Exponencial e Logarítmica.

Submetemos este trabalho à apreciação dos demais participantes do III Encontro, na certeza de estarmos atendendo, a nível nacional, às necessidades das Escolas Técnicas e Centros Tecnológicos.

Profa. ANNA MARIA BROAD MOREIRA
Coordenadora de Ciências

Na intensão de responder a essa questão, a Comissão organizou um questionário que seria aplicado aos professores das áreas técnicas ainda em 1982. Foram enviados cerca de 500 questionários aos professores das disciplinas técnicas de quase todas as escolas técnicas e de quase todos os Cefet’s espalhados pelo Brasil. Destes, foram devolvidos cerca de 300 questionários que, após serem organizados e tabulados pela Comissão, foram apresentados no relatório “Pesquisa Nacional sobre Conteúdo Programático de Matemática Específico para cada Modalidade de Cursos Técnicos”. As questões e as respostas são apresentadas a seguir:

> Pergunta: A matemática é essencial no aprendizado de sua disciplina?
> Resposta: Respostas afirmativas de 98% dos professores;
> Pergunta: Para cursar sua disciplina o aluno traz a bagagem matemática necessária?
> Resposta: Respostas afirmativas de 30% dos professores;
> Pergunta: Apenas os conhecimentos do 1º grau são exigidos ao ministrar sua disciplina?
> Resposta: Respostas afirmativas de 2% dos professores;
> Pergunta: Seus alunos reagem favoravelmente à transferência de conceitos matemáticos do 2º grau nas aplicações em sua

disciplina?
Resposta: Respostas afirmativas de 50% dos professores;
Pergunta: Indique se usa ou não usa cada conteúdo da matemática do programa oficial do 2º grau.
Resposta: Funções: 60%, Trigonometria: 80%, Logaritmos: 70%, Polinômios: 20%, Equações Algébricas: 50%, Análise Combinatória: 15%, Binômio de Newton: 10% e Progressões: 15%;
Pergunta: Indique livros específicos de sua disciplina que possuam teorias e exercícios envolvendo conceitos matemáticos.
Resposta: Diante da variedade de cursos técnicos, as respostas foram as mais diversas e, como consta no relatório, a intenção dessa questão é identificar as bibliografias mais usuais em cada disciplina técnica, verificando os conceitos matemáticos presentes e a suas aplicações, o que servirá de roteiro para a comissão de elaboração do livro-texto de matemática. A partir desses dados, o relatório traz as seguintes considerações:

1. Existe uma maior demanda por conteúdos de matemática nos cursos técnicos de Eletrotécnica, Eletrônica e Telecomunicações;
2. Constatou-se uma grande dificuldade dos professores das áreas técnicas quanto à compreensão dos conceitos de matemática usados nas disciplinas técnicas;
3. Nos cursos da área de química a preocupação maior é com o conteúdo logaritmo;
4. A grande maioria dos professores das áreas técnicas reclamou da falta de base em matemática do 1º grau, sugerindo incluir no programa uma revisão dos conceitos mais importantes que são: operações nos racionais, potência de dez, sistema métrico decimal, equações e inequações de 1º e 2º graus, razão, proporção, regra de três, porcentagem e geometria plana (fórmulas e propriedades das figuras principais).

No intuito de garantir resultados mais consistentes, simultaneamente ao questionário, a comissão realizou entrevistas com professores das áreas técnicas, procurando identificar quais os conteúdos de matemática eram mais usados nas aulas técnicas, oficinas e laboratórios. Os resultados foram:

Curso Técnico	Disciplina Técnica	Conteúdo de matemática mais usado
Química, Metalurgia, Mineração e Geologia	Físico-Química Química Inorgânica Química Orgânica	Logaritmo e Exponencial – cálculo de pH e pOH, equilíbrio químico, produto de solubilidade, solubilidade. Limite, Derivada e Integral – apenas funções algébricas, logaritmo e exponencial de base neperiana, aplicação em velocidade, equilíbrio químico e cinética.
Elétrica, Eletrônica e Telecomunicações:	Circuitos Elétricos Eletrotécnica Geral Técnica Digital Máquinas Elétricas Eletrônica Básica	Números Complexos – estudo de circuitos de correntes alternadas, circuitos “RL” em série, cálculo de impedâncias e reatâncias; Determinates, Matrizes e Sistemas Lineares – análise de circuitos pelo método das malhas, resolução de redes de correntes contínuas Kirchhoh e Maxwel, acesso à memória de sistemas digitais. Trigonometria – representação fasorial da geração, graus elétricos, valores médios, eficazes e de pico de tensão e corrente. Exponencial e Logaritmo – estudos dos circuitos transitórios, teoria do funcionamento do amperímetro, análise de carga e descarga do capacitor, etc. Limites, Derivadas e Integral – circuitos “RL” em série, linhas de transmissão, estudo da lei de indução magnética, etc. Funções e Geometria Analítica – representação fasorial da geração, representação gráfica da geração.
Edificações, Estradas, Agrimensura e Saneamento	Resistência dos Materiais Estabilidade	Geometria Espacial – cálculo de áreas e volumes dos sólidos mais comuns Derivada e Integral – cálculo do centro de gravidade e momento de inércia; cálculo de áreas planas e volume dos sólidos de revolução.
Mecânica, Eletromecânica, Refrigeração, Instrumentação	Elementos de Máquinas Termodinâmica (Máquinas Térmicas e Hidráulicas) Resistência dos Materiais	Exponencial e Logaritmos – polias e correias. Geometria Espacial – poliedros (áreas e volumes) e estudo do cone na usinagem. Limite, Derivada e Integral – resistência dos materiais e termodinâmica.

A Comissão apresentou esse relatório no IV Enconam, realizado no ano de 1983, na cidade de Salvador-BA. O encaminhamento proposto nesse encontro foi eleger uma Comissão Central Permanente – CCP, composta de professores de várias Escolas Técnicas e de vários Cefet’s, que cuidaria da elaboração final do livro-texto. Após cada reunião da comissão seria enviado um relatório às demais Escolas Técnicas. A expectativa era que fosse apresentado o livro-texto na reunião de 1984, no V Enconam, em São Paulo. Entretanto, esse encontro não ocorreu por dificuldades financeiras das instituições, conforme relata o Professor João Bosco: "ficamos um pouco esmorecidos, mas reanimamos e procuramos, com muito otimismo, levar em frente o empreendimento" (ANAIS DO V ENCONAM, 1985). Em janeiro de 1985, a CCP voltou a se reunir no Cefet-PR, visto não ter sido realizado o V Enconam no ano anterior. Nesse encontro, ficou resolvido que seriam feitas reuniões regionais com o objetivo de debater os primeiros resultados do livro-texto. Como resolução dessas reuniões ficou decidida a realização do V Enconam, na cidade de Campos-RJ, ainda em 1985, onde seriam apresentados o trabalho produzido e o resultado final, que era o livro-texto, organizado em fascículos.

Em outubro de 1985, portanto, foi realizado o V Enconam, na Escola Técnica Federal de Campos, este contou com a participação de dezoito escolas, as quais representaram um total de quatorze estados. Nessa ocasião ocorreu o encerramento das comemorações do Jubileu de Diamante, alusivo à criação do Ensino Industrial no Brasil. Sua programação foi extensa e trazia a expectativa de todos em relação ao livro-texto, que seria apresentado durante o evento. Chamou atenção de todos os presentes à Conferência de Abertura, proferida pelo professor Jorge Renato Pereira, da Escola Técnica de Campos-RJ, que discorreu sobre "As contradições do nosso Século e o Brasil que herdamos". Fazendo uma crítica ao contexto brasileiro, salientou as inovações ocorridas no século XX, as inovações científicas, o embate entre o capitalismo e o socialismo, as questões entre desenvolvimento e subdesenvolvimento e, inclusive, o avanço tecnológico de outros países, enquanto o Brasil ainda apresentava um alto índice de pessoas na miséria. Pereira também destacou que o V Enconam constituía-se como uma semente para transformar o ensino da matemática e que o livro-texto teria a função de tornar esse processo mais agradável, conciliando a teoria aos conhecimentos utilizados nos cursos técnicos. Sugeriu, ainda, que fosse feita uma adaptação dos currículos:

> o mais próximo possível dos aspectos que irão os alunos encontrar no seu período profissionalizante. Em palavras práticas e curtas: senhores professores: transformem a matemática no macacão que o técnico vai usar, um acessório seguro e importante no trabalho (ANAIS DO V ENCONAM, 1985).

A programação do evento planejara três momentos visando à análise dos fascículos produzidos pelos grupos de trabalho. No primeiro momento, foi realizada uma apresentação geral, proferida pelo professor João Bosco Laudares, sobre a produção do grupo, nessa oportunidade falou sobre "O ensino de matemática nas ETFs e CEFETs: a busca de uma metodologia própria". Laudares afirmou que o livro-texto produzido pelos próprios professores estabelecia uma ligação entre Número, Álgebra e Geometria, conceitos matemáticos imprescindíveis às disciplinas profissionalizantes. Também relatou sobre a preocupação da comissão ao propor problemas relacionados ao contexto real e aplicativo do curso, o que motivaria o aprendizado do aluno. Entretanto, salientou que nem todos os conteúdos possibilitariam tal propósito. Em seguida, fez uma breve retrospectiva dos Enconam's anteriores até chegar a esse momento muito importante para todos ali presentes. Por fim, apresentou os quatro fascículos que já estavam prontos e seriam adotados por várias Escolas Técnicas e por vários Cefet's já no ano seguinte: fascículo I – Funções; fascículo II – Exponenciais e Logaritmos; fascículo III – Trigonometria; e fascículo IV – Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares.

Figura 37 – Capa dos fascículos

Fonte: Arquivo do Ifes

O professor João Bosco informou que outros quatro fascículos já estavam prontos na forma de texto original, faltando apenas a datilografia e a diagramação: fascículo V – Números Complexos; fascículo VI – Limites e Derivadas; fascículo VII – Integrais; fascículo VIII – Análise Combinatória, Binômio de Newton e Progressões. Além destes, ainda em fase final de elaboração, faltando apenas a última análise da CCP, estavam os fascículos de Geometria Espacial, estruturado pela equipe da Escola Técnica Federal do Ceará, o fascículo de Polinômios e Equações Algébricas, pela equipe do Cefet-RJ e o fascículo de Geometria Analítica, pela equipe do Cefet-PR.

Encerrado o primeiro momento para apresentação dos fascículos, os professores foram divididos em grupos, o que permitiu uma melhor troca de experiências. O coordenador de cada grupo ficaria a cargo de um professor que já houvesse experimentado o material em sua escola. Sobre o fascículo de Funções, os professores fizeram uma análise pormenorizada, propondo sugestões para melhorar alguns textos no sentido de corrigir alguns conteúdos e de adequar a proposta metodológica. Os professores que analisaram o fascículo de Exponenciais e Logaritmos constataram que o material apresentava poucos exercícios de aplicação visando a melhor compreensão da definição, das propriedades e da mudança de base. Avaliaram também que o fascículo trazia exercícios muito fáceis e que pouco exigiria do aluno e que havia um exagero nos gráficos das funções logarítmicas e exponenciais. Apesar das críticas, os professores afirmaram que o material produzido atendia ao aluno de um modo melhor que o livro didático, pois começa com uma situação-problema usual e importante em várias outras disciplinas, principalmente as de Química e de Biologia. A novidade metodológica proposta era a uso da calculadora em sala de aula, salientando que se trata de um recurso moderno e indispensável às aulas de matemática. Os grupos que examinaram o fascículo de Trigonometria sugeriram o enriquecimento do livro com apontamentos de outros professores. Os responsáveis pela revisão do fascículo de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares consideram-no satisfatório. Já os que analisaram o fascículo de Números Complexos, de Limites e Derivadas e o fascículo de Integrais constataram que eles mereciam uma análise mais aprofundada pelos professores nas escolas, fato que promoveria uma maior participação entre o conjunto de professores.

A última atividade do V Enconam foi a palestra do professor Antônio Fernando Gagliardo, do Núcleo de Informática Aplicada ao Ensino da UNICAMP. Em sua fala discorreu sobre “A Informática Aplicada ao Ensino da Matemática”. Fazendo uso do retroprojetor, recurso moderno naquela época, relatou que a informática veio para modificar o ensino de matemática, pois seu uso requeria mais qualificação do professor. Além disso, entende que o uso dos computadores na escola serve como instrumento auxiliar no controle e na administração do ensino-aprendizagem por meio da instrução programada, permitindo ao aluno responder um grande número de questões previamente propostas, bastando seguir a orientação dos passos da programação computacional. O professor palestrante salientou que "nesse processo, o aluno é constantemente colocado em situações de decisão, sendo avaliado seu conhecimento e suas habilidades. O foco não é o computador, mas sim o pensar do aluno." (ANAIS DO V ENCONAM, 1985).

Na plenária final do encontro, foi decidido que o momento e a forma de adoção dos fascículos seriam discutidos em cada escola, mas os professores ali presentes deveriam assumir o compromisso de adotá-los, possibilitando aos demais a reprodução gráfica do material na própria escola. Além disso, foi decidido que a CCP elaboraria junto ao MEC um projeto que viabilizasse a adoção e a elaboração definitiva dos fascículos para atender a todas as escolas técnicas federais. Também foi sugerido que cada escola elaborasse exercícios para serem enviados à CCP, para que estes fossem selecionados e incorporados aos fascículos ainda inacabados. Por fim, os professores deliberaram que no ano de 1986 o VI Enconam seria promovido pela Escola Técnica Federal de Pelotas–RS. De fato, não apenas esse Enconam, muitos outros foram realizados até o ano de 1994, mas decidiu-se não os narrar para que não nos desviássemos da discussão que neste trabalho tem centralidade.

A partir dos registros escritos, fica evidenciado o desejo dos professores em assumir o papel de protagonistas pela transformação de suas práticas pedagógicas na intenção de conferir ao ensino da matemática o valor aplicativo e prático necessário à formação técnico-profissional dos estudantes. Esse desejo fica mais evidente no relato do professor Taciano Corrêa, no qual se fala sobre o quanto era trabalhoso dar aula na Escola Técnica, no final dos anos 1960 e início dos anos 1970, pois precisava elaborar as atividades e exercícios em folhas de estêncil que seriam entregues aos alunos, o professor também recorda que extraía os conteúdos do livro *Abecedário da Álgebra,* muito usado pelos professores de escolas secundárias, visto sua utilização na composição das questões para o vestibular.

Com isso, além de demandar muito tempo passando exercícios no quadro, não se fazia a devida relação entre os conteúdos de matemática e sua aplicação nas oficinas, tal fato pode ser percebido no relato do professor que vivenciou muitas experiências no ensino profissional:

> Não havia uma ligação da aula de Matemática com as oficinas. Eu é que, por livre e espontânea vontade, procurava os professores e pedia a eles exercícios e o que eles utilizariam lá pra me passarem e eu poder utilizar. Eu sempre fiz isso. Tanto é que tem um projeto

> que eu elaborei e que chegamos a mostrar num encontro de professores de Matemática das escolas técnicas federais. Apresentamos um cálculo percentual do que era utilizado em cada curso, e em que ano aquele conteúdo era usado. Então, tinha algumas coisas assim: no início do 2º ano, o pessoal de Eletrotécnica tinha de saber limite e derivada, e eles tinham condições de aprender isso independente dos outros cursos, pois PA e PG poderiam ficar para o final. Então, eu fiz um projeto que foi apresentado num congresso de Matemática das Escolas Técnicas, separando os planos de cursos dos cursos de Edificações, Agrimensura e Estradas do curso de Eletrotécnica. Não fiz para Mecânica e para Metalurgia não me lembro. Então, nesses três cursos, a geometria plana e espacial tinha que ser dada no primeiro ano, porque eles precisavam daquilo. Nos cursos de Agrimensura e Estrada, também tinha o estudo de coordenadas, trigonometria e geometria analítica já no primeiro ano. No curso de Eletrotécnica, ocorria que os professores explicavam a matéria e chegavam num ponto onde diziam: pode deixar que isso aqui, que se chama limite e derivada, vocês vão aprender no 3º ano e vão entender o problema. Então, isso tinha que ser avaliado todo ano (PINTO, 2014, p. 97).

Ativo participante do Movimento dos Enconam's o professor da antiga ETFES, Taciano Corrêa, relata a tristeza ao verificar que aquela rica iniciativa não foi levada à frente nos anos seguintes da década de 1990, mas entendia que aquela transformação proposta nos encontros de professores não seria de imediato, pois significava transformar as concepções dos professores sobre a matemática e seu ensino, aspecto para o qual o livro didático pode contribuir, mas não se mostra suficiente. Na opinião desse professor, o que houve naquele contexto foi o desejo de vários professores das escolas técnicas em mostrar a possibilidade de um ensino mais contextualizado, prático e interessado na formação profissional dos estudantes. Contudo, compreendeu a limitação do alcance daquele movimento, pois entendia que toda mudança de comportamento e de modo de agir diante de qualquer situação sempre gera uma resistência e não ocorre com rapidez.

Conclusão

Revisitando as memórias guardadas nos arquivos do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, encontramos um pouco da trajetória e da construção do currículo da educação profissional. Encontramos evidências de como a contribuição dos professores de matemática das Escolas Técnicas permitiu que essas instituições se tornassem referência no ensino de matemática em todo o Brasil.

A criação dos Enconams foi um desses movimentos, entre tantos outros, realizados ao longo do “breve século XX”, o século da tecnologia (HOBSBAWN, 1995). Todos esses movimentos tiveram o propósito de transformar o ensino de matemática, adequando seu conteúdo e metodologia às demandas da sociedade, especialmente no que diz respeito à formação para o trabalho, visando ao domínio e uso no sistema produtivo e na aplicação nas tecnologias. Miorim (1998), em seu livro *Introdução à história da educação matemática*, retrata esse percurso histórico desde a antiguidade até o século XX e, em relação ao último século, apresenta a história do “Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática”, cuja perspectiva tinha o professor Félix Klein como inspirador de uma articulação entre a abordagem de um ensino teórico, restrito às escolas secundárias, e a de um ensino aplicado e prático, presente nas Escolas Técnicas, possibilitando romper com a “antiga separação entre uma formação clássica e uma técnica, aquela destinada aos que continuariam seus estudos, esta para os que deveriam apenas trabalhar” (MIORIM, 1998, p. 71). Nesse sentido, o percurso aqui apresentado revelou-nos a atualidade de uma questão que perpassa a história, ou seja, a integração curricular fundamentada na perspectiva da formação que tem o tripé trabalho, ciência e cultura como eixo curricular.

Ao apresentarmos a história dos Enconam’s algumas considerações são importantes. A primeira é a que essa história traz à cena o movimento dos professores de matemática das escolas técnicas federais, mostrando a contribuição deles para que essas instituições se tornassem referência no ensino de matemática no país. Considerando-se o contexto em que ocorreu, é possível estabelecer relação entre o movimento dos professores das escolas técnicas e o movimento dos professores e pesquisadores de educação matemática em todo o Brasil, que resultou na criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Outra importante consideração foi perceber, muito embora haja uma diferença de quase oitenta anos, identidade e semelhança entre o movimento dos professores das escolas técnicas e o idealizado pelo professor Félix Klein em torno do Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática, aspecto já salientado.

Com efeito, a proposta do professor alemão, que trabalhou na *Technische Hochschue* de Zurique, apresentava a perspectiva da integração entre a teoria e a prática, entre a abordagem de um ensino restrito às escolas secundárias e a de um ensino presente nas Escolas Técnicas, pois essa perspectiva possibilitaria romper com a "antiga separação entre uma formação clássica e uma técnica, aquela destinada aos que continuariam seus estudos, esta para os que deveriam apenas trabalhar" (Miorim, 1978, p. 71). Uma diferenciação estabelecida entre os dois movimentos diz respeito à constatação que, enquanto o movimento internacional ocorrido no início do século dizia respeito à transformação do ensino de matemática nas escolas secundárias tomando-se como referência o ensino das escolas técnicas, o movimento nacional dos professores das escolas técnicas federais em torno dos Enconam's dizia respeito à transformação desse ensino nas próprias escolas técnicas, explicada, talvez, pela forte influência do currículo das escolas secundárias em detrimento da desvalorização do ensino profissional no Brasil (CUNHA, 2000). Nesse sentido, pode ser gratificante descobrir que, quase um século após a organização do Primeiro Seminário Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática, essa preocupação ainda perpassava a ação de muitos professores das Escolas Técnicas Federais.

Por fim, outra consideração diz respeito ao contexto e à época da mobilização dos Enconam's, donde se constata que movidos pelos ares democráticos da década de 1980 os professores buscaram tornar-se protagonistas de suas práticas, fazendo um "retorno às origens", ou seja, um retorno àquele ensino baseado em situações práticas, no qual os conceitos matemáticos seriam desenvolvidos a partir da necessidade de problemas originados nas oficinas, realçando uma ciência concebida na perspectiva da integração com as demais ciências e aplicada à realidade e ao contexto cultural e profissional do aluno, compreensão essa que, em nossa opinião, requer um deslocamento epistemológico contrário ao ocorrido ao longo do século XX e, por isso mesmo, muito desafiadora e instigante para a educação matemática atual.

Nesse sentido, o percurso aqui apresentado revelou-nos a atualidade de uma questão que perpassa a história, ou seja, a integração curricular fundamentada na perspectiva da formação que tem o tripé trabalho, ciência e cultura como eixos curriculares. Revelou-nos, ainda, que quase um século após a organização do Primeiro Seminário

Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática, essa preocupação ainda perpassava a ação de muitos professores das Escolas Técnicas Federais. Entretanto, o objetivo desse movimento não era reduzir a matemática à mera instrumentalidade, mas ampliá-la, realçando uma ciência concebida na perspectiva da integração com as demais ciências e aplicada à realidade e contexto cultural e profissional do aluno, compreensão essa que requer um deslocamento epistemológico contrário ao ocorrido ao longo do século XX e, por isso mesmo, muito desafiadora e instigante para a educação matemática atual. Assim, movidos pelo contexto democrático da década de 1980, buscaram um “retorno às origens”, ou seja, um retorno àquele ensino baseado em situações práticas, onde os conceitos matemáticos seriam desenvolvidos a partir da necessidade de problemas originados nas oficinas.

Referências

CENTRO Federal de Educação Tecnológica do Paraná. **Matemática nas ETF´s e CEFET´s**. Curitiba-PR: [s.n.], 1984.

CENTRO Federal de Educação Tecnológica do Paraná. **Matemática nas ETF´s e CEFET´s**. Exponenciais e Logaritmos. Curitiba-PR: Cefet-PR, 1984.

CENTRO Federal de Educação Tecnológica do Paraná. **Matemática nas ETF´s e CEFET´s**. Trigonometria. Curitiba-PR, 1984.

CENTRO Federal de Educação Tecnológica do Paraná. **Matemática nas ETF´s e CEFET´s**. Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares. Curitiba-PR: Cefet-PR, 1984.

CENTRO Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. **Relatório...** Pesquisa Nacional sobre Conteúdo Programático de Matemática Específico para cada Modalidade de Cursos Técnicos. Belo Horizonte: Cefet/MG, 1982.

ESCOLA Tecnica Federal de Campos. **Relatório...** V Encontro de professores de Matemática das Escolas Técnicas Federais e Centros Federais. Campos-RJ: ETFCampos, 1985.52p.

SILVA, Josiel Domingos da; MOREIRA, Manuel Pinto. Função Exponencial e Logaritmica. In: ENCONAM, 3., 1982, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: Escola Técnica Federal de Alagoas, 1991. p. 2.

BLOC, M. L. B. Apologia da história, ou, O ofício de historiador; prefácio, Jaques Le Goff. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, Ed., 2001

CUNHA, L. A. O ensino de ofícios nos primórdios da industrialização. São Paulo: Editora UNESP, Brasília-DF: Flacso, 2000.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

GUINZBURG, C. **Mitos, emblemas e sinais:** morfologia e história. São Paulo: Companhia das letras, 1989.

LE GOFF, J. **História e memória.** Campinas, SP: Ed. Unicamp, 2003.

MEIHY, José C. S. B. **Manual de História Oral.** São Paulo: Edições Loyola, 2000.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

PINTO, Antonio Henrique. **Educação matemática e formação para o trabalho:** a experiência matemática na formação de trabalhadores. Curitiba: Appris, 2014.

LAUDARES, João Bosco (Org.). **Relatório:** Pesquisa Nacional sobre Conteúdo Programático de Matemática Específico para cada Modalidade de Cursos Técnicos. Editado pelo Cefet/MG em 1982.

Concepções sobre a aprendizagem de matemática

Alexandre Krüger Zocolotti
Saddo Ag Almouloud

Tendo por base a ideia de que as concepções são determinantes para a atuação do professor, pesquisamos um grupo de quatro professores de matemática da Educação Básica que frequentaram diferentes cursos de Complementação Pedagógica.

Durante a realização da pesquisa pudemos constatar que a prática de três desses quatro docentes envolvia, quase exclusivamente, o uso de atividades que possibilitavam apenas o desenvolvimento das habilidades elementares de cálculo e memorização. Acreditamos que o principal resultado da pesquisa foi a constatação de que se faz necessário reformular a estrutura dos atuais cursos de Complementação Pedagógica, utilizando os resultados das discussões que vêm sendo feitas sobre a Licenciatura para que fosse feita a aproximação entre os dois modelos de formação de professores de matemática vigentes no País (Licenciatura e Complementação Pedagógica).

Concepções

Para tomar decisões, é comum ao professor lançar mão de uma série de recursos pessoais: "elementos" que ele foi construindo ao longo de sua vida, por meio de suas experiências, quer sejam individuais – suas interpretações dos fatos – quer sejam sociais, nas quais o contato com outras pessoas e com outros modos de pensar acaba por exercer influência sobre as suas visões de mundo. Os "elementos" que possuem tais características, a nosso ver, são as concepções.

Mas o que são concepções?

> Concepção é, na verdade, um termo difícil de definir e cujo significado nos escapa com facilidade. Em linguagem corrente, quando perguntamos a alguém qual é a sua concepção disto ou daquilo, o que, de um modo geral, queremos saber é o que a pessoa pensa sobre determinada coisa, qual é a forma como ela a vê ou encara (GUIMARÃES, 2010, p. 84).

Para alguns autores (PONTE, 1992; SZTAJN, 1998; GUIMARÃES, 2010), Alba Thompson é a primeira autora a dedicar-se a esse campo de pesquisa na Educação Matemática. Contrariando as tendências da época – início da década de 1980 – seu trabalho investiu numa linha de pesquisa baseada na seguinte afirmativa:

> Os professores desenvolvem padrões de comportamento característicos de sua prática pedagógica. Em alguns casos, estes padrões podem ser manifestações de noções, crenças e preferências, conscientemente sustentadas, que agem como "forças motrizes" na formação do seu comportamento. Em outros casos, as forças motrizes podem ser crenças ou instituições, inconscientemente sustentadas, que podem ter evoluído fora da experiência do professor (THOMPSON, 1997, p. 12).

Concordamos com a autora e também acreditamos que as concepções influenciam a prática cotidiana dos professores, interferindo de modo direto em suas atuações como "mediadores primários entre o conteúdo e os alunos" (p. 12). Nesse sentido, as concepções "ordenariam" as ações dos professores.

Todo professor possui concepções: são elas que permitem que ele interprete situações de seu dia a dia na sala de aula. Cremos que essas concepções foram sendo "construídas" a partir de situações vividas pelo professor, quer seja durante o seu processo formativo, quer seja durante a sua atuação como docente.

O interesse em estudar as concepções, para Ponte (1992), também pode ser reforçado pelo fato:

> de que existe um substrato conceitual que joga um papel determinante no pensamento e na ação. Esse substrato é de natureza diferente dos conceitos específicos – não diz respeito a objetos ou ações bem determinadas, mas antes constitui uma forma de os organizar, de ver o mundo, de pensar. Não se reduz aos aspectos mais imediatamente observáveis do comportamento e não se revela com facilidade – nem aos outros nem a nós mesmos (PONTE, 1992, p. 01).

Dessa forma, ao estudarmos as concepções de um professor, podemos ter acesso ao seu modo particular de organizar o conteúdo e ao modo que julga ser pertinente torná-lo objeto de aprendizagem de seus alunos. É interessante notar que existe uma distinção entre conhecimento específico e concepções[15]: enquanto o primeiro é

15 Na distinção entre saberes específicos e concepções, o trabalho de Thompson é um dos pioneiros,

passível de aprendizagem e de medição – são comuns os processos de avaliação de aprendizagem de conteúdos em todos os níveis de ensino –, o segundo é formado por meio de uma construção pessoal, não momentânea, em que pesam as situações vividas ao longo do processo de formação, tando na área pessoal, como na profissional. Além disso, as concepções, como afirma Ponte (1992), não são elementos que possam ser medidos por meio de exames ou de avaliações, ao contrário, sua descoberta demanda processos mais subjetivos e que, por isso mesmo, nem sempre são simples ou de respostas imediatas.

Nos textos de Ponte (1992), de Guimarães (2010) e de Thompson (1982), existem a indicação de que as concepções possuem, na vida docente, uma dupla função:

- De um lado surge a ideia de que as concepções servem como "elementos de adaptação" à situação, influenciando diretamente a ação do professor. Assim, quando um professor é apresentado a uma nova proposta de trabalho, suas concepções entram em cena, auxiliando-o na adaptação do seu trabalho a essa nova condição;
- De outro lado, encontra-se a noção de que as concepções atuam como um fator de mediação entre a situação e o professor. Desse modo, por exemplo, quando um professor é apresentado a uma informação, suas concepções servem como um "elemento antecipador", colaborando com sua percepção e com sua interpretação dessa informação.

Gostaríamos de propor uma relação entre os trabalhos de Dewey (1910) e de Thompson (1997) a partir da situação de um professor iniciante. Mesmo iniciante, esse professor possui concepções formadas muito mais por crenças do que por experiências anteriores. Essas concepções permitem a interpretação antecipada da situação e indicam caminhos de ação, conforme a proposta de Dewey (1910), porém, para esse autor, é somente no confronto com a experiência vivida que a concepção se forma.

As situações que o sujeito começará a viver como docente irão gerar um saber da experiência, nos termos de Shulman (1986) e de Tardif (2002). E esse saber da experiência, incorporado ao conjunto de

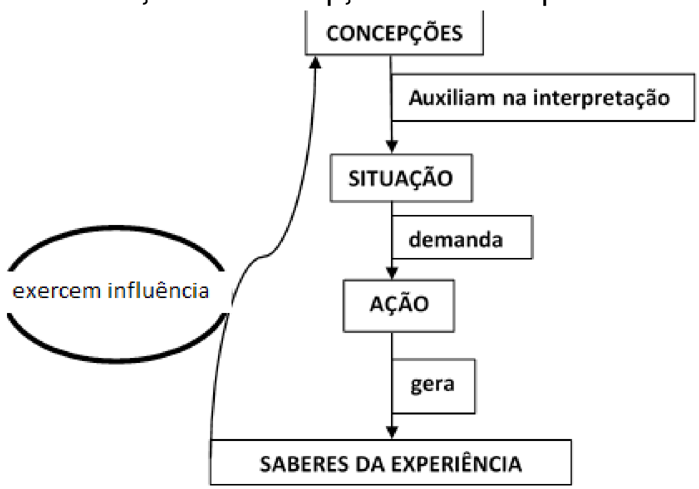
---

pois abandona a pesquisa vigente na época – conhecimentos matemáticos dos professores – para investigar como suas concepções interferiam nos seus afazeres de sala de aula.

outros saberes desse professor, influenciará as preferências conscientemente sustentadas, as quais são defendidas por Thompson (1997). Assim, existe uma interação entre as concepções e os saberes da experiência: as concepções influenciam as ações do docente, essas ações permitirão a aquisição dos saberes da experiência e esses saberes exercerão influência nas concepções, alterando-as.

Esquematicamente

Figura 38: Relação entre concepção e saber da experiência



Fonte: acervo do autor

Pelo esquema, ao deparar com uma situação – que pode ser o planejamento de um curso ou de uma aula, por exemplo – o professor, apoiado em suas concepções, adota uma ou mais ações que julga ser adequadas para a sua condução. Essas ações trarão uma série de resultados e, a partir da análise desses resultados, novos saberes serão obtidos pelo professor – os saberes da prática ou da experiência –, os quais, ao serem incorporados ao conjunto de conhecimentos dos professores, acabam por alterar não apenas os próprios saberes, mas também as crenças e as suas concepções.

Assim, assumimos que as concepções, no caso dos professores, são os suportes do trabalho docente., os quais podem ser pontos de vista, opiniões, crenças ou conhecimentos prévios que cada professor possui e que manifesta por intermédio de suas ações, moldando algo que se pode definir como "estilo próprio". Desse modo, a prática cotidiana pode ser entendida como uma das formas de manifestação das concepções de um professor.

Também acreditamos que as concepções são passíveis de mutações ao longo do tempo de exercício da docência. Não cabem aqui afirmações como: "com o tempo, as concepções se tornam melhores" ou "esse docente *melhorou* suas concepções". Acreditamos apenas que, com o tempo, elas modificam-se.

O "estilo próprio" é revelado pelo modo como o professor conduz os processos de ensino e de aprendizagem: quais atividades são propostas, como divide o tempo de aula, qual relação estabelece com seus alunos, quais materiais são utilizados em suas aulas, entre outros. Desse modo, se for possível elencar algumas particularidades desse "estilo próprio", acredita-se estar em um caminho adequado na tentativa de caracterização (momentânea) das concepções de um professor.

Os professores e suas concepções

Os cenários de pesquisa localizavam-se em municípios do Espírito Santo. Por isso, julgamos conveniente relatar um pouco da recente história da formação de professores de Matemática nesse estado.

> Historicamente, os professores que atuavam nessa região eram formados no curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo – UFES – ou eram profissionais de outras áreas que, devido à falta de licenciados, atuavam como docentes, mesmo sem a habilitação legal. Com a intervenção do MEC, fiscalizando a formação dos professores que atuavam em sala de aula e com a expansão de vagas no ensino superior na rede particular, alguns cursos de licenciatura curta (ou complementação pedagógica) e plena foram criados na região (ZOCOLOTTI, 2010, p. 89).

Não foram pesquisados professores cuja formação inicial fosse a licenciatura ou o bacharelado em Matemática: a pesquisa destinou-se ao estudo das concepções de professores de Matemática cuja formação inicial foi em um curso de área afim à Matemática. A busca por um grupo de participantes com esse tipo específico de formação alinha-se com a hipótese de que a concepção relativa à Matemática e a seus processos de ensino e de aprendizagem possui influência da formação que se teve na graduação.

Por fim, optamos por trabalhar com professores dos Ensinos Fundamental II e Médio, tanto da rede pública como da rede privada. Tal opção teve por finalidade fazer com que a pesquisa fosse a mais abrangente possível. Assim surgiu a ideia de trabalharmos com quatro professores: dois do Ensino Médio – ambos da rede privada – e dois do Ensino Fundamental II – ambos da rede municipal.

Neste trabalho, analisamos apenas o caso da professora Luisa, sobre ela cabe esclarecer que é casada e mãe de dois filhos e que na data da pesquisa, março de 2015, estava com 43 anos. Além disso, estava começando o seu décimo quinto ano como professora de Matemática, apesar de já ter atuado no Ensino Médio e na Formação de Professores, optou pelo Ensino Fundamental, por tratar-se do segmento no qual preferia atuar. Além de ser formada em Economia e Licenciada em Matemática, também era Pós-Graduada em Educação e Mestre em Ensino de Ciências e Matemáticas. Na época da pesquisa, atuava em duas redes municipais, Vila Velha pela manhã e Serra, à tarde, sendo que acompanhamos suas aulas pela manhã, em turmas de oitavo e nono ano.

A professora jamais atuou como economista, curso que concluiu em 2000: as dificuldades para inserir-se no mercado de trabalho nessa área a fizeram optar por, já em 2001, fazer a Licenciatura em Matemática (a professora sempre se referiu ao curso de Complementação Pedagógica como Licenciatura em Matemática). Segundo ela, a conclusão do curso a permitiria prestar um concurso para docente, o que a auxiliaria a consolidar uma carreira nessa área.

Sobre a sua formação, a professora Luísa possuía uma postura esclarecida de sua formação como docente: declarou entender que a Licenciatura era apenas o seu estágio inicial de formação e que a formação do professor se dá na sala de aula, no seu dia a dia, na observação do seu aluno, na sua prática, o que você pode mudar, uma questão mesmo de bom senso e depois na formação continuada do próprio grupo. Desse modo, a professora entendia a formação docente como um processo que exige continuidade e os anos de prática em sala de aula acabam também tendo um formativo como fonte de produção de conhecimento, algo que lembra a proposta de Tardif (2011).

Ainda sobre os processos formativos, ela entendia que todo professor de Matemática deve possuir conhecimentos sobre a Educação Matemática, pois, para ela, será por meio dos conhecimentos ligados a essa área que se criarão novas estratégias de trabalho, quando a situação assim exigir. Também revelou compreender que o ensino de Matemática deve ir além dos cálculos, que, em sua opinião, são o ponto de partida, mas que a conversa que ocorre em sala não deve ser reduzida apenas a eles.

Em relação às questões ligadas à aprendizagem de Matemática, possuía uma visão de que a situação do ensino está crítica, pois entendia que o ensino dessa disciplina, de modo geral, ainda se encontra preso ao ciclo exemplo-exercícios-correção de exercícios. Até mesmos os alunos, segundo ela, esperam que esse seja o processo de ensino, mostrando-se surpresos quando essa não é a sistemática adotada.

Nesse sentido, de acordo com a professora, um aluno, para aprender Matemática, precisa

> “ter compreensão do ambiente onde ele está e deve refletir de acordo com cada situação. Isso o permitirá tomar decisões a partir daquele ponto, tendo autonomia para olhar um contexto, compreender e decidir o que ele vai fazer, para depois ele partir para um processo de cálculo O cálculo é um ferramental necessário, mas a compreensão, o raciocínio lógico, a tomada de decisão e a autonomia fazem parte do processo de aprender Matemática.
>
> E, logicamente, depois você tem que conseguir explicar tudo aquilo que você está pensando por um raciocínio, quer seja um processo de cálculo quer seja uma lógica construída, que não necessariamente precisa ser um processo de cálculo. Você pode construir uma ideia que seja um raciocino lógico, um encadeamento lógico de pensar que não necessariamente venha a ser apenas um resultado numérico. Eu acho que nossas práticas de Matemática podem levar uma pessoa a ter essa compreensão”.

O envolvimento da citada professora com a sala de aula chega a ser impressionante, sendo capaz de perceber detalhes que, para outros, podem passar despercebidos. Por exemplo, sua perspicácia a faz crer que os meninos sentem-se mais seguros em relação a Matemática por terem, segundo ela, menos medo de errar que as meninas (não querendo dizer com isso que as meninas sejam menos capazes). Como, para ela, o aprendizado de Matemática envolve erro e correções, é necessário que o aluno aprenda a trabalhar assim, calculando, errando e recalculando. Ainda segundo a docente, a pessoa que possui menos medo de errar possui maior predisposição para aprender Matemática.

Durante uma das entrevistas, disse acreditar que o educando deve estar mais predisposto a aprender e ser capaz de perceber que a educação pode fazer a diferença em sua vida. E que o papel do o professor é motivar os alunos, mostrando a eles a realidade e os conhecimentos que já possuímos e convidando-os a ingressar nesse novo mundo científico, contribuindo com as visões e experiências deles, para que se tornem seres ativos.

No período das análises da prática da professora Luísa, pudemos perceber que ela sempre tentava fazer com que o aluno fosse, de fato, um ser ativo em seu processo de aprendizagem, corroborando com aquilo que havia manifestado em entrevista. Vale destacar que as observações de aula dessa professora ocorreram em duas séries distintas, a saber, 8º e 9º anos, ambas numa mesma escola.

Em uma das observações, feita na turma de 9º ano, a professora trabalhava com a demonstração do Teorema de Pitágoras e para esta utilizou uma folha de papel – normalmente chamada de chamex ou sulfite ou A4 – e um instrumento de corte – tesoura ou, em alguns casos, régua. Foi a segunda demonstração a ser feita, fazendo parte daquilo que a professora chamava de "Laboratório de Matemática".

Cabe expor que até certo ponto foi surpreendente ver a professora trabalhando o conteúdo de Geometria. Nossa expectativa, pela formação em Economia, era que esse fosse um assunto que não conseguiríamos acompanhar durante as nossas observações. Mas a professora não só o trabalhou como o fez com desenvoltura, mostrando domínio do conteúdo e segurança em suas ações. Utilizando linguagem matemática adequada, mas sem formalismos excessivos, a professora demonstrava aos alunos o que iria ser feito e depois os auxiliava em suas construções, mostrando sempre uma atitude muita ativa e exigindo que seus alunos também estivessem empenhados na realização de suas tarefas.

Quanto aos alunos, pareciam estar bem envolvidos, motivados com o trabalho proposto pela professora, sendo que, em certos momentos, interagiam entre si, discutindo seus pontos de dúvidas. Coerentemente ao discurso já defendido de que o aluno precisa compreender "onde está" durante o processo de ensino e aprendizagem, a professora não "entregou" o final da demonstração, lançando-a como um desafio para os alunos, que deveriam entender o que já haviam feito e em que ponto deveriam chegar. Essa atividade foi, ao nosso modo de ver, um diferencial em relação a todas as outras observações feitas nesta pesquisa, pois nela os alunos foram, de fato, colocados como seres ativos em sua aprendizagem. Tal fato pôde ser observado, porque as respostas não chegavam prontas, sendo necessária a interação e o entendimento, por parte do aluno, da situação que estava sendo vivenciada, para que uma resposta pudesse ser elaborada. Em circunstâncias como essas, portanto, a professora manifestava sua crença sobre o que é aprender.

Ao que nos parece, Luísa conseguiu, de fato, consolidar sua carreira como docente. Seu comportamento destoou dos outros participantes da pesquisa: enquanto os demais optavam por uma prática que os colocava como "detentores do saber", essa docente envolvia seus alunos em atividades, questionando-os a todo momento e colocando-os como seres ativos em seus processos de aprendizagem.

Conclusão

A realização da pesquisa permite-nos afirmar que para ser professor de Matemática no Brasil, pode-se optar por dois caminhos: fazer a Licenciatura ou, depois de graduado, fazer a Complementação Pedagógica. Porém, esses caminhos, a nosso ver, oferecem formações distintas e contraditórias: enquanto a primeira é objeto de constantes discussões, o segundo não é objeto de qualquer discussão e ainda está sujeito a regulamentações que datam da época da sua implantação, ainda na década de 1990. Entendemos que enquanto as licenciaturas em Matemática do país não forem capazes de formar a quantidade de professores necessária para atender as demandas, os cursos de Complementação Pedagógica devem ser mantidos. Porém, acreditamos que esses cursos devem passar por uma ampla discussão e regulamentação, usando, se possível, os resultados obtidos nas discussões a respeito da Licenciatura.

As observações que fizemos reforçaram que a prática profissional é um fator que contribui fortemente na formação do professor, pois a vivência de situações cotidianas em sala de aula acaba por contribuir com o processo formativo, moldando e transformando o indivíduo, tornando-o professor. Nessa perspectiva, cabe refletirmos sobre o que disse a professora Luísa: "o que forma o professor é o chão da sala de aula".

A pesquisa confirma, portanto que a formação inicial influencia as concepções com as quais o professor se insere no mercado de trabalho. Entretanto, pudemos perceber que essas concepções são mutáveis e essa mutação depende da postura do professor frente a situações que lhe são colocadas no cotidiano da sala de aula e nos processos de formação que frequenta.

Referências